



**Цефеида со спутником** (А.А. Татарникова)

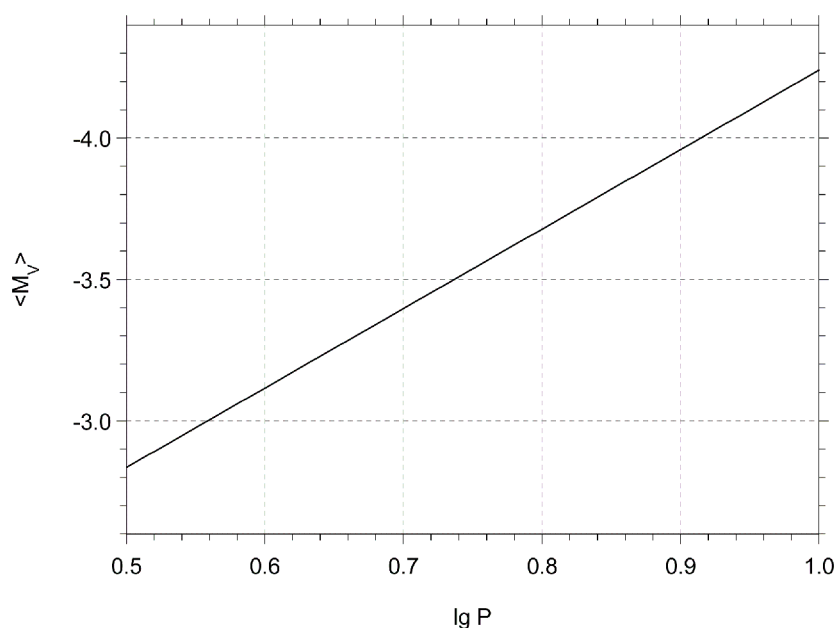
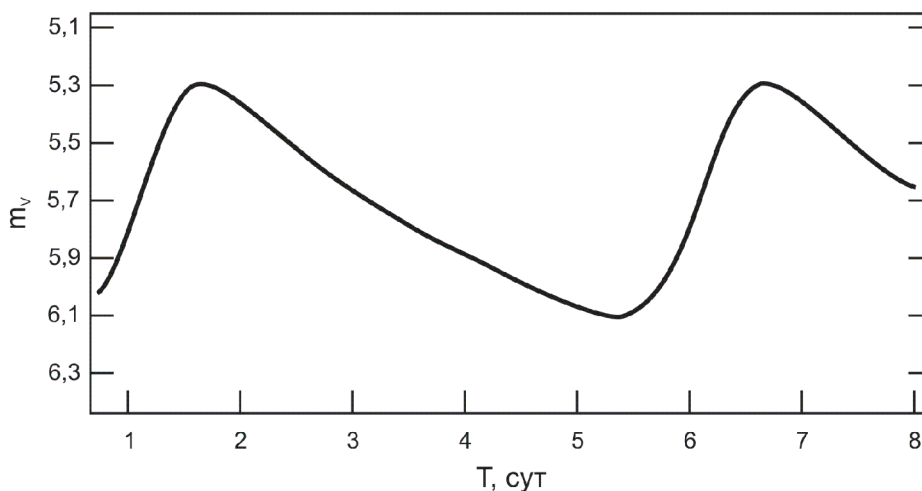
Класс:

**10 11**

Задача:

**2**

**?** **Переменная звезда — цефеида располагается на небе точно на линии эклиптики. В течение года она перемещается относительно более далеких звезд, вычерчивая отрезок длиной  $0.0020''$  точно вдоль эклиптики. Во время своего противостояния с Солнцем звезда оказывается в середине этого отрезка. Известно, что эта цефеида входит в состав двойной системы с круговыми орбитами и периодом 1 год. Оцените массу второго компонента двойной звезды, если известно, что она заметно меньше массы цефеиды, равной 5 массам Солнца. На рисунках представлена кривая блеска цефеиды и зависимость "логарифм периода — средняя за период абсолютная звездная величина". Собственное движение системы как единого целого и межзвездное поглощение не учитывать.**



## XVII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

! Отрезок, который описывает звезда вдоль линии эклиптики, имеет все признаки параллактического движения. Этому соответствует и то, что в момент противостояния звезда оказывается в середине отрезка. В этом случае тригонометрический параллакс  $\pi_1$  составляет  $0.0010''$ . Однако, мы можем определить расстояние до цефеиды другим способом: методом "фотометрического параллакса".

По кривой блеска оцениваем средний блеск цефеиды  $m$  ( $5.7^m$ ) и период колебаний блеска  $P$  (5 суток). Как известно, период колебаний связан с абсолютной звездной величиной  $m_0$  соотношением, график которого приведен в условии задачи. По нему находим:  $m_0 = -3.4$ . Имея абсолютную и видимую величины, можно определить фотометрический параллакс:

$$\lg \pi_2'' = 0.2 (m_0 - m) - 1.$$

Значение  $\pi_2$  оказывается равным  $0.0015''$ , что в полтора раза превышает измеренный тригонометрический параллакс. При этом межзвездное поглощение отсутствует. Мы можем сделать вывод, что фотометрический параллакс характеризует истинное расстояние до цефеиды (670 пк), а годовое параллактическое движение звезды искажено влиянием ее спутника, обращающегося с тем же периодом в 1 год. Нам нужно найти величину этого искажения.

Влияние спутника не выводит звезду с линии эклиптики, следовательно, круговое орбитальное вращение также происходит в плоскости эклиптики. Более того, в момент противостояния звезды, когда ее параллактическое смещение обращается в ноль, орбитальное смещение также отсутствует. Из этого можно сделать вывод, что орбитальное движение в плоскости эклиптики происходит либо в том же направлении, что параллактическое, либо в точности противоположно ему (иными словами, разность фаз равна либо нулю, либо  $180^\circ$ ). Обозначим через  $\alpha$  половину отрезка, описываемого звездой в ходе ее орбитального движения. Тогда для первого и второго случая:

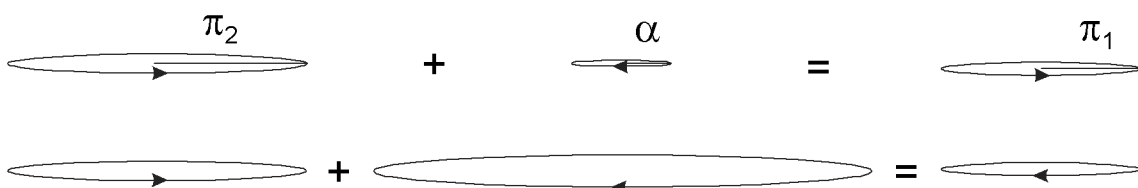
$$\begin{aligned} \pi_2 - \alpha_1 &= \pi_1, \\ \pi_2 - \alpha_2 &= -\pi_1, \end{aligned}$$

из чего следует:

$$\alpha_{2,1} = \pi_2 \pm \pi_1.$$

Значения угла  $\alpha$  для первого и второго случая составляет  $0.0005''$  и  $0.0025''$  соответственно. Зная расстояние до цефеиды, можно найти радиус орбиты главной звезды:

$$a_{C1,2}(\text{a.e.}) = \frac{\alpha_{1,2}''}{\pi_2''} = 0.3; 1.7.$$



## Практический тур

Радиусы орбит двух звезд ( $a_c$  и  $a_x$ ) связаны соотношением

$$\frac{a_c}{a_x} = \frac{M_x}{M_c},$$

где  $M_c$  и  $M_x$  — массы этих звезд. Расстояние между звездами составляет

$$a = a_x + a_c = a_c \left( 1 + \frac{M_c}{M_x} \right).$$

Выражая массы в массах Солнца, большую полуось в а.е., период обращения в годах (он равен единице), можно записать III закон Кеплера:

$$a^3 = M_x + M_c;$$
$$a_c = \frac{(M_x + M_c)^{1/3}}{1 + \frac{M_c}{M_x}}.$$

По условию задачи, масса спутника заметно меньше массы цефеиды. В этом случае уравнение упрощается:

$$a_c = \frac{M_x (M_c)^{1/3}}{M_c}; \quad M_x = a_c M_c^{2/3}.$$

Подставляя два возможных значения  $a_c$ , получаем значения  $M_x$ : 1 и 5 масс Солнца. Во втором случае масса получается сопоставимой с массой цефеиды, что противоречит условию задачи и сделанным предположениям. Поэтому мы можем сделать вывод, что из двух сценариев, изображенных на рисунке, возможен только первый, а масса спутника цефеиды равна одной массе Солнца.



## Метеорный ливень (О.С. Угольников)

Класс:

**10 11**

Задача:

**3**

**?** В Анапе (широта  $+45^\circ$ ) наблюдается сильная вспышка метеорного дождя, продолжающаяся около часа. В ее середине радиант потока, находящийся на небесном экваторе, проходит точку верхней кульминации. Наблюдатель регистрирует метеоры, относящиеся к потоку и появляющиеся в узкой полосе (ширина  $10^\circ$ ) вдоль небесного меридиана от севера до юга на высоте более  $20^\circ$ . За 20 минут наблюдений вблизи максимума вспышки он заметил 500 таких метеоров.

Нарисуйте график количества зафиксированных метеоров от положения точки возгорания на меридиане с интервалом в  $10^\circ$  (зенитное расстояние от  $0^\circ$  до  $10^\circ$ , от  $10^\circ$  до  $20^\circ$ , ... , от  $60^\circ$  до  $70^\circ$  на севере и юге).

Считать, что проникающая способность наблюдателя метеоров одинакова по всему меридиану, не зависит от угловой скорости метеоров и составляет  $4^m$ . Принять, что все метеоры загораются на высоте 100 км в атмосфере Земли, а их распределение по яркости соответствует индексу 2.512 (в каждом участке неба метеоров ярче  $2^m$  в 2.512 раза больше, чем метеоров ярче  $1^m$ , метеоров ярче  $3^m$  — в 2.512 раза больше, чем метеоров ярче  $2^m$  и так далее).

Атмосферным поглощением света пренебречь (для 10 класса).

Атмосферное поглощение света в зените составляет  $0.2^m$  (для 11 класса).

**!** Радиант метеорного потока располагается на небесном экваторе, и его зенитное расстояние в момент верхней кульминации  $z_R$  равно широте места наблюдения,  $45^\circ$ . Наблюдения продолжались всего 10 минут до кульминации и 10 минут после нее. Этот период меньше продолжительности вспышки. За это же время радиант удалился от небесного меридиана всего на  $2.5^\circ$ . Это вдвое меньше полуширины полосы, в которой фиксировались метеоры. Поэтому мы можем рассматривать картину в плоскости небесного меридиана и считать, что радиант все время находится в этой плоскости на зенитном расстоянии  $z_R$ . Построим рисунок в плоскости небесного меридиана, поместив наблюдателя в точку **O**.

Рассмотрим одну из 10-градусных зон, в которых ведется подсчет метеоров. Пусть  $z$  — зенитное расстояние середины этой зоны (оно может быть равно  $5^\circ$ ,  $15^\circ$  и т.д. до  $65^\circ$ ), а  $\Delta z$  — ее полуширина, составляющая  $5^\circ$ . Проведем окружность, проходящую на высоте  $h$  над поверхностью Земли. Метеоры, попадающие в указанную зону, загораются на дуге  $A_1A_2$  этой окружности. Длина этой дуги существенно меньше радиуса окружности ( $R+h$ ), и мы можем считать эту дугу отрезком прямой.

Пусть точка **A** на дуге соответствует середине данной зоны (с хорошей точностью она совпадает с серединой отрезка  $A_1A_2$ ). Обозначим расстояние от наблюдателя до точки **A** через  $l$ . В треугольнике **COA** на рисунке угол **COA** — смежный по отношению к зенитному расстоянию  $z$ . Поэтому мы можем записать выражение теоремы косинусов как





## Практический тур

правой части рисунка. Все полученные ранее формулы при этом остаются справедливыми, а угол  $\alpha$  для точек в северной части меридиана также будет отрицательным. Угловое расстояние между точкой меридиана с зенитным расстоянием  $z$  и радиантом составит

$$\gamma = z - z_R.$$

Данная величина положительна к югу от радианта и отрицательна к северу от него. Найдем угол  $\beta$ , под которым метеорные тела влетают в атмосферу Земли. Из рисунков видно, что:

$$\beta = \alpha - \gamma = z_R - \frac{h}{R} \operatorname{tg} z.$$

Для модели "плоской Земли" последнее соотношение будет простым и очевидным:  $\beta_F = z_R$ . Теперь найдем длину отрезка  $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ :

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = h \cdot (\operatorname{tg}(z + \Delta z) - \operatorname{tg}(z - \Delta z)) = \frac{2h\Delta z}{\cos^2 z}.$$

Здесь мы вновь использовали приближенную тригонометрическую формулу, учитывая малость величины  $\Delta z$ .

Количество метеоров, загоревшихся в той или иной 10-градусной зоне, пропорциональны величине площадки, перпендикулярной движению метеоров, в которую они должны попасть, чтобы быть зарегистрированными в этой зоне. Форма этой площадки близка к прямоугольнику, одна из сторон которого составляет:

$$d = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cos \beta = \frac{2h\Delta z}{\cos^2 z} \cos \left( z_R - \operatorname{tg} z \frac{h}{R} \right).$$

Из двух компонент, стоящих в скобках, вторая значительно меньше первой, в чем можно убедиться подстановкой максимального значения  $z$ , при котором проводились наблюдения. Вновь применяя формулу приближенной тригонометрии, получаем:

$$d = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cos \beta = \frac{2h\Delta z \cos z_R}{\cos^2 z} + \frac{2h\Delta z \sin z_R}{\cos^2 z} \operatorname{tg} z \frac{h}{R} = \frac{2h\Delta z \cos z_R}{\cos^2 z} \cdot \left( 1 + \frac{h \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z_R}{R} \right).$$

Для модели "плоской Земли", очевидно:

$$d_F = \frac{2h\Delta z \cos z_R}{\cos^2 z}.$$

Вторая сторона прямоугольника горизонтальна и перпендикулярна плоскости рисунка. Ее длина составляет

$$b = l \cdot \theta = \frac{h \cdot \theta}{\cos z},$$

где  $\theta$  — постоянная ширина полосы наблюдений. В формуле также учтено, что данная ширина невелика. В итоге, искомая площадь составляет

## XVII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

$$S = d \cdot b = \frac{2h^2\theta \Delta z \cos z_R}{\cos^3 z} \cdot \left(1 + \frac{h \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z_R}{R}\right)$$

Для модели "плоской Земли":

$$S_F = \frac{2h^2\theta \Delta z \cos z_R}{\cos^3 z}.$$

Обращаем внимание, что полученная зависимость достаточно проста (числитель является постоянной величиной) и характеризуется резким увеличением площади при удалении от зенита. Разумеется, количество метеоров не будет так сильно зависеть от зенитного расстояния, так как наблюдатель видит только самые яркие метеоры, с блеском свыше 4<sup>m</sup>. По условию задачи, с увеличением звездной величины на 1<sup>m</sup> (то есть, при уменьшении минимальной яркости в 2.512 раза) количество метеоров ярче указанного уровня возрастает в 2.512 раза. Иными словами, число метеоров ярче величины  $J$  пропорционально  $1/J$ .

Предположим, в атмосферу влетело метеорное тело. Яркость этого метеора при наблюдении в зените составила  $J_0$ . Определим, какую яркость это тело бы имело при наблюдении на зенитном расстоянии  $z$ . Если пренебречь поглощением света в атмосфере (как это было предложено в задании для 10 класса), то яркость уменьшится только за счет большего расстояния до метеора. В таком случае

$$J_1 = J_0 \frac{h^2}{l^2} = J_0 \cos^2 z.$$

Если же учесть атмосферное поглощение (как было нужно в задании для 11 класса), то яркость составит

$$J_2 = J_0 \frac{h^2}{l^2} \cdot \frac{10^{-0.4 \cdot m_e / \cos z}}{10^{-0.4 \cdot m_e}} = J_0 \cos^2 z \cdot 10^{-0.4 \cdot m_e \cdot \left(\frac{1}{\cos z} - 1\right)}.$$

Здесь  $m_e$  — значение атмосферного поглощения в зените. Получается, что метеоры вдали от зенита оказываются слабее, чем такие же метеоры в зените. Пусть  $j$  — минимальная яркость метеора, заметная невооруженным глазом в зените. Чтобы быть замеченным на зенитном расстоянии  $z$ , метеор должен иметь там такую же яркость  $j$ , а в зените он тогда был бы ярче в  $J_0/J_{1(2)}$  раз. Но, как указывалось выше, таких метеоров меньше, соответствующий коэффициент есть обратная величина к отношению яркостей. Доля видимых глазом метеоров из всех, попавших в данную 10-градусную зону, будет пропорциональна величине

$$F_{1(2)} = \frac{J_{1(2)}}{J_0}.$$

В итоге, количество метеоров будет пропорционально площади  $S$  и величине  $F_1$  ( $F_2$ ):



## Практический тур

$$n_1 = S \cdot F_1 = \frac{2h^2\theta \Delta z \cos z_R}{\cos z} \cdot \left(1 + \frac{htgz \operatorname{tg} z_R}{R}\right),$$

$$n_2 = S \cdot F_2 = \frac{2h^2\theta \Delta z \cos z_R}{\cos z} 10^{-0.4 \cdot m_e \cdot \left(\frac{1}{\cos z} - 1\right)} \cdot \left(1 + \frac{htgz \operatorname{tg} z_R}{R}\right).$$

В модели "плоской Земли" в формулах отпадают последние множители:

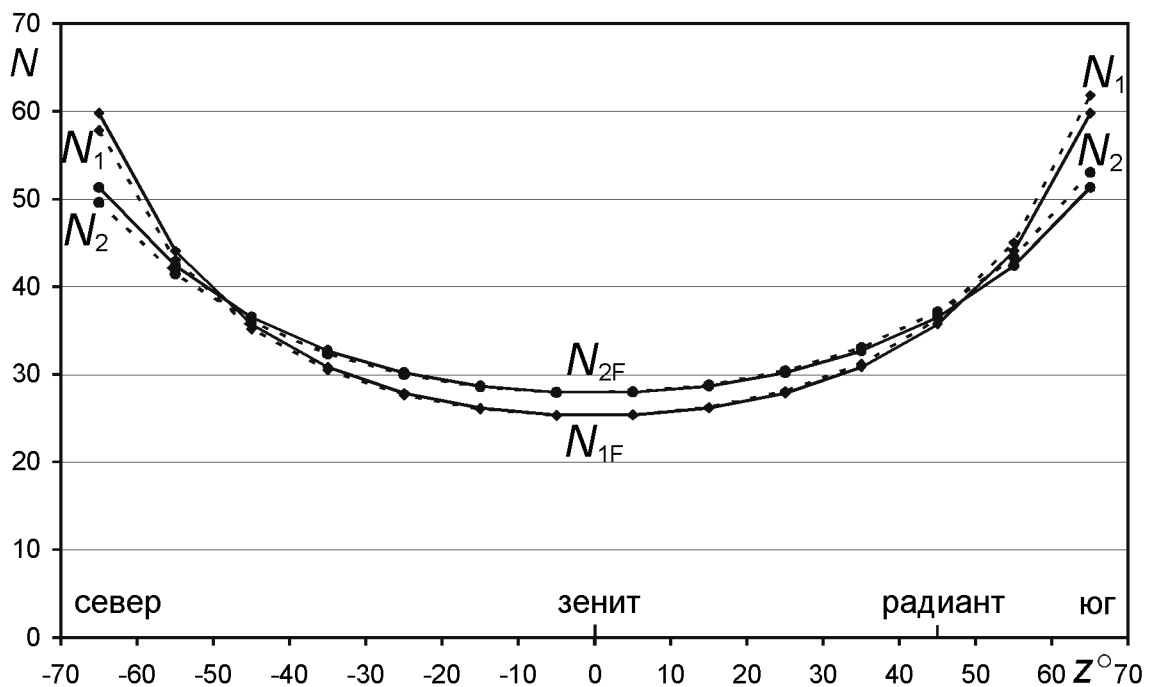
$$n_{1F} = S_F \cdot F_1 = \frac{2h^2\theta \Delta z \cos z_R}{\cos z},$$

$$n_{2F} = S_F \cdot F_2 = \frac{2h^2\theta \Delta z \cos z_R}{\cos z} 10^{-0.4 \cdot m_e \cdot \left(\frac{1}{\cos z} - 1\right)}.$$

Нам известно, что полное количество метеоров, зарегистрированных вдоль участка меридиана, составляло 500. Чтобы получить количество метеоров, вспыхнувших в каждой 10-градусной зоне, нужно "нормировать" полученные значения  $n$ :

$$N_{1,2}(z_i) = 500 \cdot \frac{n_{1,2}(z_i)}{\sum_j n_{1,2}(z_j)}, \quad N_{1F,2F}(z_i) = 500 \cdot \frac{n_{1F,2F}(z_i)}{\sum_j n_{1F,2F}(z_j)}.$$

Результаты представлены в виде графиков. Сплошными линиями показаны зависимости, полученные с использованием модели "плоской Земли". Мы видим, что количество метеоров увеличивается от зенита к горизонту. Этот факт сохраняется и для кривой  $N_2$ , рассчитанной с учетом атмосферного поглощения, хотя указанная зависимость там менее резкая. В реальности, при больших значениях атмосферного поглощения  $m_e$  и



## XVII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

заметной засветке неба у горизонта наклон кривой еще слабее, а на больших зенитных расстояниях число метеоров начинает уменьшаться.

Приближенный учет сферичности Земли приводит к едва заметным отклонениям только при  $z$  порядка  $60^\circ$ - $70^\circ$ , как показывают пунктирные линии на графике. Эти отклонения делают кривую несимметричной относительно зенита — в южной части неба, под радиантом, метеоров чуть больше, чем у северного горизонта. Но в рамках указанных зенитных расстояний разница результатов двух моделей, мала, что еще раз подтверждает возможность использовать простую модель "плоской Земли".



**NGC 5750** (Е.Н. Фадеев, О.С. Угольников)

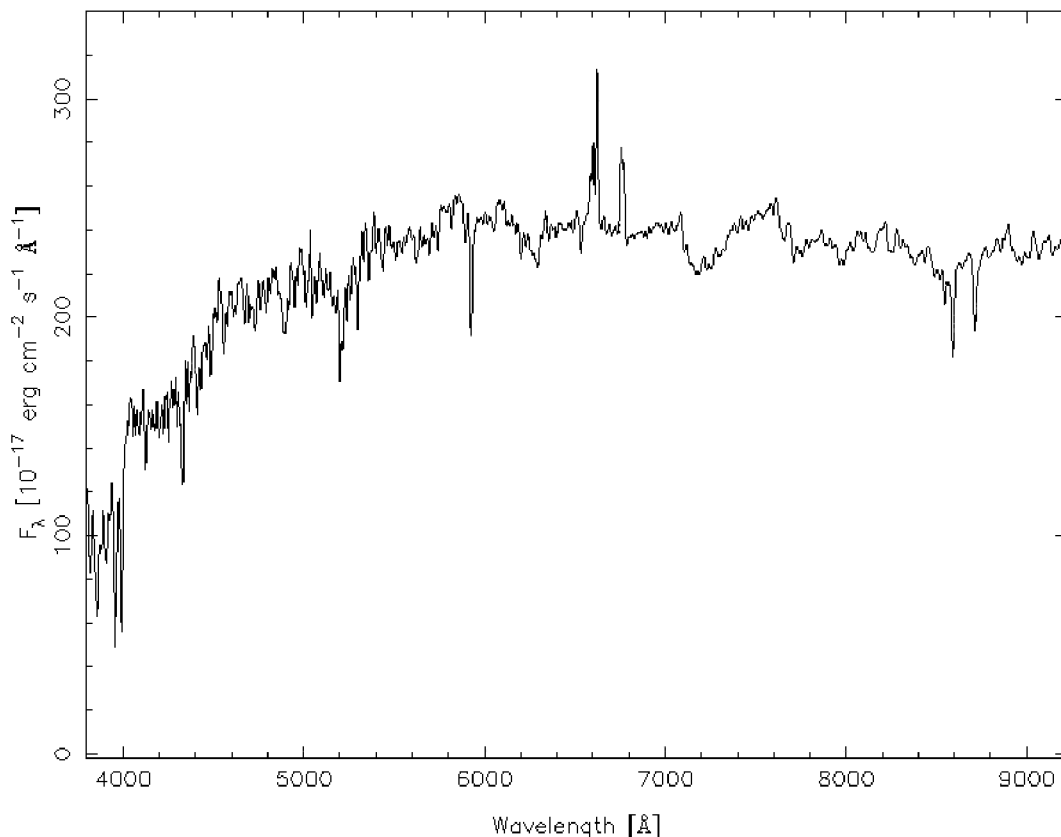
Класс:

**11**

Задача:

**1**

**?** Галактика NGC 5750 находится на расстоянии 25 Мпк от Земли. На рисунке изображен ее спектр. На Земле проводится фотометрия галактики с двумя светофильтрами — зеленым (область пропускания от 5000 до 5200 ангстрем) и красным (от 6000 до 6300 ангстрем). Определите отношение потоков энергии от галактики, зарегистрированных в "зеленой" и "красной" спектральных областях. Каким стало бы это отношение, если бы галактика в настоящее время располагалась в 50 раз дальше от Земли? Оба светофильтра считать идеальными (100%-пропускание света внутри рабочей полосы и полное блокирование света вне ее). Атмосферным и межгалактическим поглощением пренебречь.



## Практический тур

! На графике представлены зависимости потока ее излучения  $F_\lambda$  (мощность на единицу площади) на единицу длины волны — ангстрем.

Если мы возьмем светофильтр, вырезающий определенный диапазон длин волн (от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ ), то поток излучения от галактики, измеренный с этим светофильтром, составит площадь фигуры под графиком, ограниченной вертикальными прямыми, соответствующими данным длинам волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Для двух светофильтров, описанных в условии задачи, эти прямые показаны на рисунке сплошными линиями.

Однако, если спектральные вариации в пределах данного интервала невелики (если там нет сильных линий поглощения или излучения), то поток излучения может быть выражен простой формулой:

$$J = F \cdot \Delta \lambda,$$

где  $\Delta \lambda$  — ширина спектрального интервала, а  $F$  — среднее значение функции  $F_\lambda$  на этом интервале (если спектр имеет форму прямой, то  $F$  будет равно значению функции  $F_\lambda$  в середине интервала).

Выделим интервалы, указанные в условии задачи. Резких вариаций функции  $F_\lambda$  на этих интервалах нет. Определим по графику средние значения этой функции на интервалах:

$$F_{01} = 2.2 \cdot 10^{-15} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ \AA}^{-1}; \quad F_{02} = 2.4 \cdot 10^{-15} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ \AA}^{-1}.$$

Отношение потоков в двух полосах составит

$$K_0 = \frac{J_{01}}{J_{02}} = \frac{F_{01} \Delta \lambda_{01}}{F_{02} \Delta \lambda_{02}} = 0.6.$$

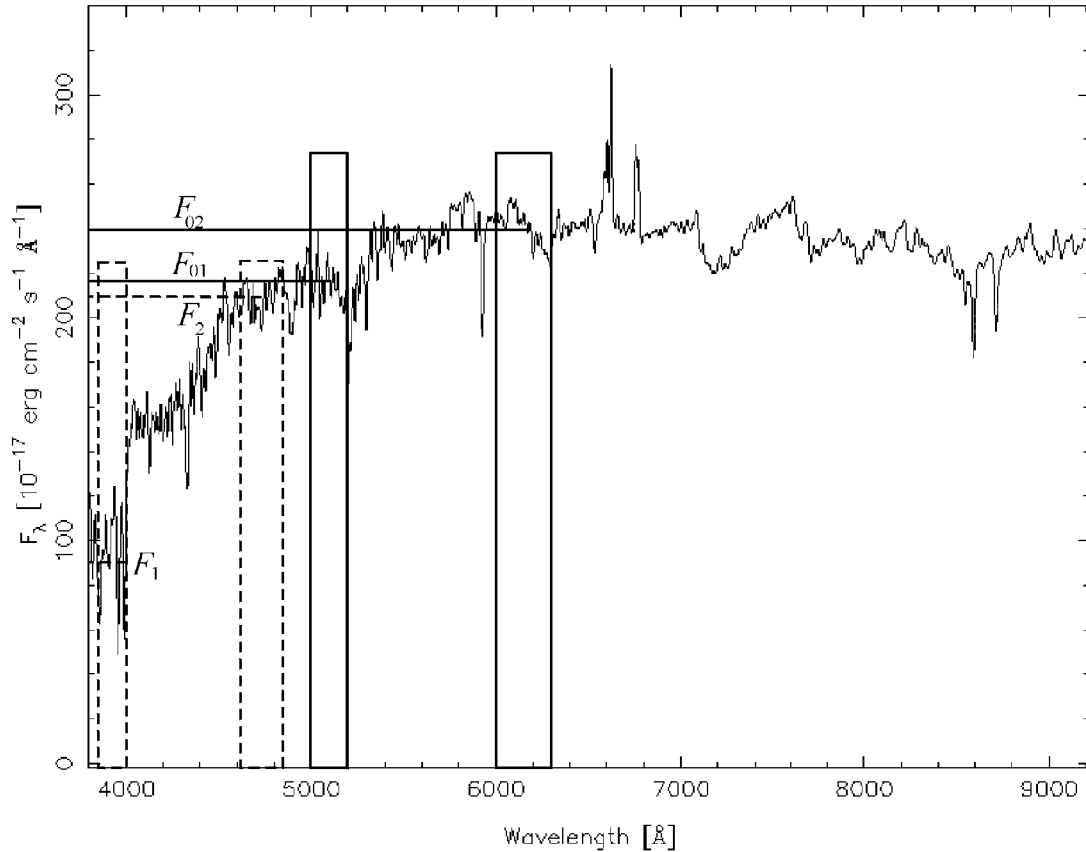
Галактика, находящаяся от нас на расстоянии  $R_0$  (25 Мпк), будет иметь красное смещение:

$$z_0 = \frac{H \cdot R_0}{c} = 0.006.$$

Эта величина мала, и космологические эффекты не будут оказывать заметного влияния на фотометрические характеристики галактики. Но при увеличении расстояния  $R$  в 50 раз (до 1.25 Гпк) красное смещение  $z$  составит уже весьма заметную величину: 0.3. В то же время, оно остается меньше единицы, что позволяет нам пользоваться формулой, аналогичной написанной выше. Излучение галактики с длиной волны  $\lambda_0$  будет регистрироваться на длине волны  $\lambda$ :

$$\lambda = \lambda_0 (1 + z).$$

Если мы будем наблюдать эту галактику на Земле с теми же светофильтрами (от 5000 до 5200 и от 6000 до 6300 ангстрем), то мы будем регистрировать ее излучение, испущенное в других спектральных интервалах, длина волн которых будет в  $(1+z)$  или в 1.3 раза меньше наблюдаемых. Нетрудно посчитать, что это будут интервалы от 3850 до 4000 и от 4615 до 4845 ангстрем. В обоих случаях ширина интервала  $\Delta \lambda$  будет в 1.3 раза меньше соответствующей ширины  $\Delta \lambda_0$ .



Проведем соответствующие вертикальные линии на графике и получим характерные значения функции  $F_\lambda$ :

$$F_{C1} = 0.9 \cdot 10^{-15} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ \AA}^{-1}; \quad F_{C2} = 2.1 \cdot 10^{-15} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ \AA}^{-1}.$$

Величины  $F_1$  и  $F_2$ , относящиеся к расстоянию  $R$ , соответствуют формуле

$$F_{1,2} = F_{C1,2} \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \theta(z),$$

где величина  $\theta(z)$  немного меньше единицы и зависит от принимаемой космологической модели. Она учитывает, в частности, уменьшение энергии и частоты их регистрации за счет расширения Вселенной. Однако, данный множитель одинаков для всех длин волн. Поэтому

$$K = \frac{J_1}{J_2} = \frac{F_1 \Delta\lambda_1}{F_2 \Delta\lambda_2} = \frac{F_{C1} \Delta\lambda_{01}}{F_{C2} \Delta\lambda_{02}} = 0.3.$$