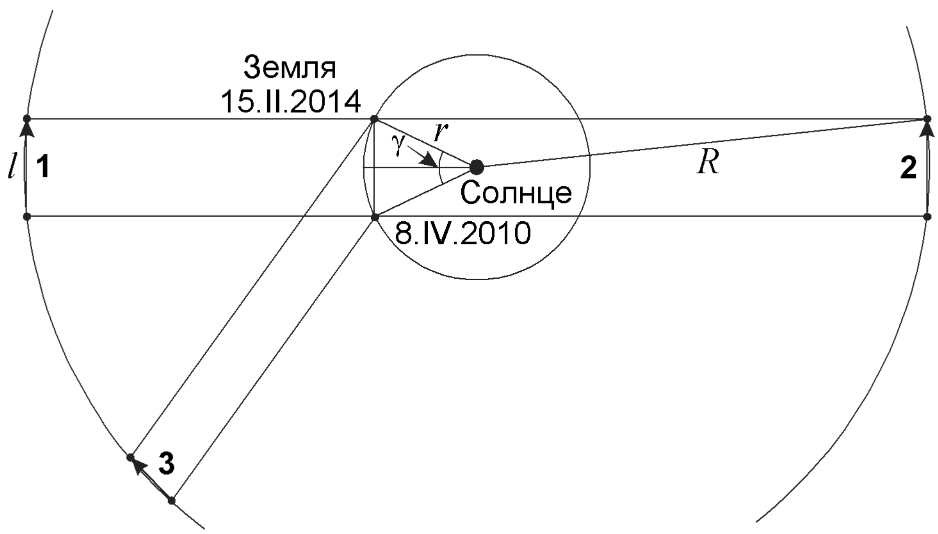
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Две Олимпиады (О.С. Угольников)

Класс: 9 10 11 Задача: 1

? В середине двух олимпиад, проходящих в Краснодарском крае – XVII Всероссийской олимпиады по астрономии (Анапа, 8 апреля 2010 г.) и XXII Зимних Олимпийских игр (Сочи, 15 февраля 2014 г.) некий транснептуновый объект с круговой орбитой наблюдается в одной и той же точке неба (относительно звезд). Найдите минимально возможное значение радиуса орбиты этого объекта. Орбиту Земли считать также круговой, астрономической аберрацией пренебречь.



! Изобразим на рисунке орбиту Земли и ее положения в две указанные даты.

За период между этими датами Земля совершила три полных оборота вокруг Солнца и сделала большую часть четвертого оборота, до его завершения ей осталось пройти дугу с углом γ. Считая орбиту Земли круговой и ее движение по ней равномерным, находим этот угол:

$$\gamma = 360^{\mathrm{o}} \frac{52}{365.25} = 51^{\mathrm{o}}.$$

Здесь было принято, что продолжительность года составляет ровно 365.25 суток, и положения Земли 8 апреля 2010 и 2014 годов совпадают. Тогда четвертый оборот Земля завершит 8 апреля 2014 года, то есть через 52 дня после середины XXII зимних Олимпийских игр. Расстояние между двумя положениями Земли составляет

$$l = 2r\sin\frac{\gamma}{2} = 0.86 \text{ а.е.}$$

По условию задания, в обе даты транснептуновый объект оказывается в одной и той же точке неба. Это означает, что направления от Земли к этому объекту в эти даты параллельны друг другу. Объект движется по круговой орбите с радиусом, большим радиуса Нептуна (чей период обращения составляет 165 лет), и за 4 неполных года сделал лишь малую часть своего оборота вокруг Солнца. Его перемещение за это время с хорошей точностью можно считать отрезком прямой линии.

Так как требуется найти минимально возможное значение радиуса орбиты объекта, нужно рассмотреть случай, при котором скорость и перемещение будут максимальными. Из рисунка видно, что в плоскости эклиптики этот случай достигается в положениях 1 и 2, когда перемещение объекта происходит параллельно линии перемещения Земли между указанными датами. В других положениях (в частности, в положении 3) перемещение и скорость объекта будут меньшими.

Объект может и не находиться в плоскости эклиптики, но и в этом случае максимально возможное перемещение объекта составит 0.86 а.е. Время между двумя датами, выраженное в годах, составляет

$$t = 4 - \frac{52}{365.25} = 3.86.$$

Скорость объекта получается равной (0.86/3.86) или 0.223 а.е. в год, что чуть более 1 км/с. По III закону Кеплера получаем соотношение между орбитальной скоростью v и радиусом круговой орбиты a:

$$\frac{a^3}{T^2} = a\left(\frac{a}{T}\right)^2 = \frac{a v^2}{4\pi^2} = const; \quad a v^2 = const.$$

Земля движется по орбите с радиусом 1 а.е. со скоростью (2π) а.е. в год. Следовательно, радиус орбиты транснептунового объекта, выраженный в астрономических единицах, составляет

$$R = \left(\frac{2\pi}{0.223}\right)^2 = 790.$$

Объект располагается значительно дальше пояса Койпера и, по-видимому, относится к внутренним областям облака Оорта.

Дорога к башне (О.С. Угольников)

Класс: 10 11 Задача: 4

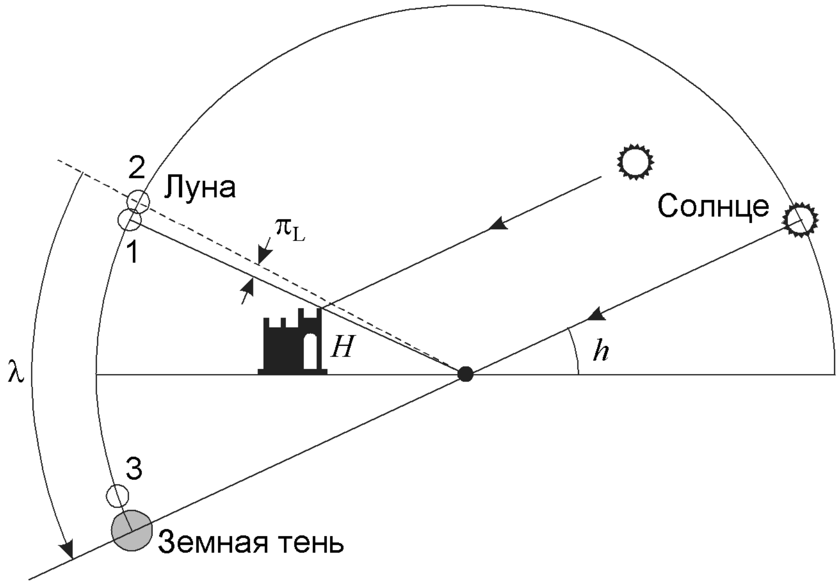
? ***"Путник вышел на прямую дорогу, ведущую ко входу в высокую башню. Прямо над ней появился силуэт Луны, который был как будто закреплен на башне. А в маленьком вертикальном окне на самом верху, смотрящем точно на дорогу, отразился луч вечернего Солнца. Путник направился к башне и, достигнув ее, заметил, что Солнце за это же время вдвое приблизилось к горизонту.***

На следующий вечер Луна, не успев появиться на небе, вдруг стала блекнуть, а потом приобрела страшный темно-красный лик..."

Считая скорость путника равной 3 км/ч, определите высоту башни. Наклоном лунной орбиты к эклиптике, ее эксцентриситетом, а также атмосферной рефракцией пренебречь.

! Поместим начальное положение путешественника в центр небесной сферы и изобразим ее проекцию на плоскость, содержащую зенит и вершину башни. Очевидно, что в момент начала пути в этой же плоскости окажется Луна, лежащая на линии "путешественник – вершина башни". В плоскости рисунка окажется и Солнце, так как его луч отражается окном, перпендикулярным этой плоскости, и приходит к путешественнику вместе с лучом от Луны.

Обозначим на рисунке положение Луны в момент начала пути цифрой 1. По условию задачи, мы пренебрегаем наклоном орбиты Луны к плоскости эклиптики. Тогда оба светила находятся на эклиптике. В то же время они располагаются в плоскости рисунка и не находятся в совпадающих либо противоположных точках небесной сферы. Следовательно, плоскость рисунка совпадает с плоскостью эклиптики, а большой круг небесной сферы, проходящий через Солнце и Луну и изображенный на рисунке – есть сама линия эклиптики.



Данная линия проходит через зенит наблюдателя. Такое может быть только в тропическом поясе Земли с модулем широты φ не более величины наклона экватора к эклиптике ε (23.4°).

Перейдем в геоцентрическую систему отсчета (или, проще говоря, представим, что радиус Земли несравнимо меньше расстояния до Луны). Это практически не изменит видимого положения далекого Солнца, но скажется на расположении Луны. Вместо положения 1 она будет находиться в положении 2, выше над горизонтом на угол π_L. Луне остается 1 день до фазы полнолуния (и лунного затмения), поэтому ее высота над горизонтом, очевидно, невелика. Тогда угол π_L с хорошей точностью равен горизонтальному параллаксу Луны, составляющему 0.95°. При этом Луна останется в плоскости эклиптики, так как последняя в данный момент перпендикулярна горизонту.

Для простоты дальнейших рассуждений будем считать, что Солнце не движется по эклиптике, а Луна перемещается по ней равномерно с синодическим периодом T (29.53 суток). Равномерность этого движения связана с пренебрежением эксцентриситетом орбиты Луны по условию задачи. Угловая скорость этого движения равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Здесь и далее углы в формулах приводятся в радианной мере. За счет суточного вращения небесной сферы Солнце движется под углом $((\pi/2) - |\varphi|)$ к горизонту. Угловая скорость этого движения составит

$$\Omega = \frac{2\pi \cos\delta}{T_0}.$$

Здесь T_0 – продолжительность солнечных суток, δ – склонение Солнца. Обозначим высоту Солнца над горизонтом в момент начала пути через h, а время перемещения путешественника к башне через t. За это время Солнце опустилось к горизонту на высоту $h/2$. Учитывая, что величина h невелика, получаем:

$$\Omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - |\varphi|\right) \cdot t = \frac{2\pi}{T_0} \cos\delta \cos\varphi \cdot t = \frac{h}{2}.$$

Величины δ и φ нам неизвестны. Однако мы знаем, что их модуль не превосходит 23.4°, а их косинусы близки к единице (не меньше 0.92). На самом деле, это произведение можно оценить еще точнее, если учесть, что δ – склонение точки эклиптики у горизонта (Солнца), а φ – широта места, равная склонению другой точки эклиптики, отстоящей от первой практически на 90°. С точностью до $\sin^4\varepsilon/8$ (около 0.3%) выполняется соотношение

$$\cos\delta \cos\varphi = \cos\varepsilon,$$

в чем можно убедиться для элементарных случаев точек равноденствий и солнцестояний. В итоге,

$$h = \frac{4\pi}{T_0} \cos\varepsilon \cdot t.$$

Еще через время t центр Солнца зайдет за горизонт. Далее, через сутки (время T_0), к следующему вечеру, Луна перемещается по эклиптике в положение 3. По условию задачи, с ее восходом (и заходом Солнца, совпадающим с восходом Луны с точностью до нескольких минут) начинается теневое лунное затмение. Так как Луна движется по эклиптике, затмение будет полным, более того – центральным. Если считать орбиту Луны круговой, то ее видимый радиус r_1 составит 0.26°, а радиус земной тени r_2 будет равен 0.69°. Эти величины можно легко рассчитать, вследствие их малости высокая точность не требуется. Наибольшая фаза затмения будет отстоять от захода Солнца на время

$$t_L = \frac{r_1 + r_2}{\omega} = T \cdot \frac{r_1 + r_2}{2\pi},$$

что составляет 1.9 часа. Эту величину можно также оценить, зная реальную продолжительность лунных затмений.

Как видно из рисунка, за период времени с момента начала пути и до середины лунного затмения Луна переместится вдоль эклиптики на угол

$$\lambda = 2h + \pi_L.$$

Нам известна угловая скорость этого движения (ω) и величина времени. Получаем следующее соотношение:

$$\frac{2\pi}{T} \cdot (2t + T_0 + t_L) = 2h + \pi_L.$$

Подставляя выражение для h, полученное выше, получаем уравнение для величины t:

$$4\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{T_0 + t_L}{T} = 8\pi \frac{t}{T_0} \cos\varepsilon + \pi_L.$$

В результате,

$$t = \left(\frac{T_0 + t_L}{T} - \frac{\pi_L}{2\pi} \right) \cdot \left(\frac{4\cos\varepsilon}{T_0} - \frac{2}{T} \right)^{-1}.$$

Подставляя численные данные, получаем, что путь до башни занял 13.5 минут. Приведенный расчет является наиболее точным. Однако, выкладки можно существенно упростить. Пренебрежем лунным параллаксом и будем считать, что Луна прошла по эклиптике угол $2h$. Учтем также, что величины t_L и t много меньше солнечных суток T_0. Опустим также величины $\cos\varphi$ и $\cos\delta$ (или $\cos\varepsilon$), считая их равными 1. Тогда мы можем получить простое приближенное выражение для времени пути (здесь и далее приближенные величины имеют индекс "A"):

$$t_A = \frac{T_0^2}{4T} = 12 \text{ мин}.$$

Далее, нам нужно определить величину h:

$$h = \frac{4\pi}{T_0} \cos\varepsilon \cdot t;$$

$$h_A = \frac{4\pi}{T_0} \cdot t_A = \pi \, \frac{T_0}{T}.$$

Переводя в градусную меру, получаем 6.2° и 6.1° соответственно. Наконец, высота башни равна

$$H = v \cdot t \cdot \operatorname{tg} h = 70 \text{ м}.$$

$$H_A = v \cdot t_A \cdot \operatorname{tg} h_A = v \cdot \frac{T_0^2}{4T} \cdot \pi \, \frac{T_0}{T} = \frac{\pi}{4} v \frac{T_0^3}{T^2} = 65 \text{ м}.$$

Здесь v – скорость путешественника. Несмотря на большое количество допущений, приближенный ответ мало отличается от более точного. Указанный пример показывает высокую эффективность приближенного вычисления при условии его обоснованности.

Древнеримская ночь (Е.Н. Фадеев)

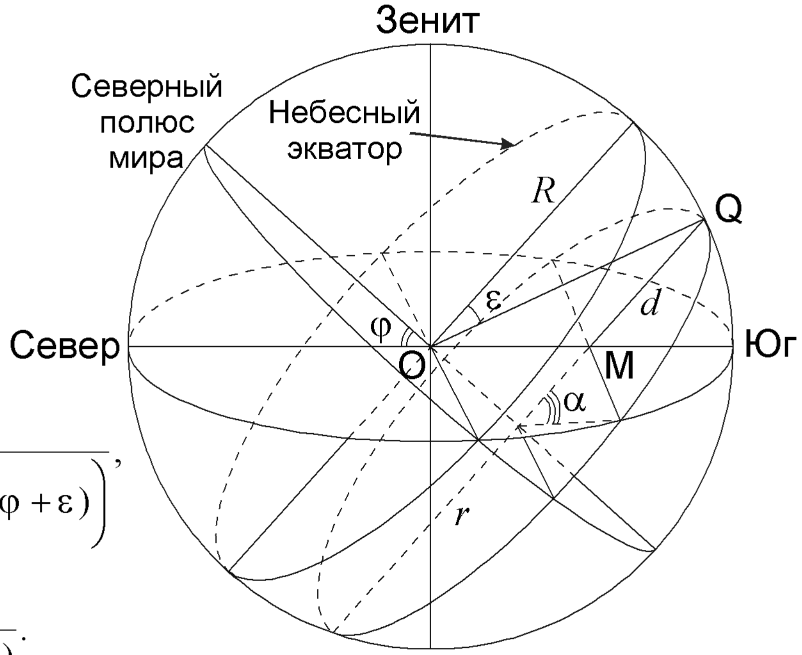
Класс: **11** Задача: **2**

? В древнеримском войске ночь всегда делилась на 4 одинаковые стражи. Определить, во сколько раз отличалась продолжительность стражи в день зимнего солнцестояния от дня летнего солнцестояния? Рефракцией и размерами Солнца пренебречь. Широта Рима равна 42°, наклон экватора к эклиптике во времена Древнего Рима составлял 23°45′.

! Продолжительность стражи зависит исключительно от продолжительности ночи. Летом ночь короткая, значит и длительность стражи невелика. Наоборот, зимой ночи длинные, посему и время стражи увеличивается. Таким образом, для решения задачи необходимо выяснить, какова продолжительность ночи в дни летнего и зимнего солнцестояния на указанной широте.

Рассмотрим, например, движение Солнца в день зимнего солнцестояния. В этот день Солнце движется среди звезд параллельно небесному экватору, и его склонение можно считать постоянной величиной. Суточное движение Солнца происходит по малому кругу, параллельному небесному экватору и отстоящему от него к югу на угол ε (23°45′). Нарисуем этот малый круг, обозначив его радиус как r. Пусть в точке **Q** Солнце проходит точку верхней кульминации. Проведем хорду, соединяющую точки восхода и захода Солнца. Обозначим расстояние от точки **Q** до этой хорды как d. Фактически это часть радиуса суточной параллели Солнца r, выступающей над математическим горизонтом. Длина дневного пути Солнца l будет равна

$$l = 2\alpha \cdot r = $$
$$= 2r \arccos\left(1 - \frac{d}{r}\right).$$



Обратимся теперь к проекции небесной сферы на небесный меридиан. Из треугольника **OMQ** можно выразить величину d:

$$\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = \frac{d}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\varphi + \varepsilon)\right)},$$

$$\frac{R}{\cos\varphi} = \frac{d}{\cos(\varphi + \varepsilon)}.$$

Здесь R — радиус небесной сферы, φ — широта места. Принимая во внимание, что

$$r = R\cos\varepsilon,$$

получаем

$$\frac{d}{r} = 1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon.$$

Подставляя полученное уравнение в выражение для l, получаем

$$l = 2r\arccos(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon).$$

Продолжительность ночи в долях суток получается равной

$$1 - \frac{l}{2\pi r} = 1 - \frac{\arccos(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon)}{\pi} \approx 0.63$$

или $15^ч07^м$.

Продолжительность ночи в день летнего солнцестояния будет равна продолжительности дня в день зимнего солнцестояния и составит всего $8^ч53^м$. То есть, летом ночь короче в 1.7 раза, чем зимой. Во столько же раз короче будет продолжительность стражи. В абсолютных единицах продолжительность стражи составит зимой $3^ч47^м$, а летом $2^ч13^м$.

Поверхностная яркость планет (О.С. Угольников)

Класс: **11** Задача: **3**

? Расположите большие планеты Солнечной системы в порядке убывания поверхностной яркости (на одну квадратную секунду освещенного полного диска). Какое место займет Земля среди этих планет в данной последовательности, если ее наблюдать извне? Считать, что планеты отражают свет равномерно во все стороны.

! Пусть планета располагается на расстоянии r от Солнца и d – от Земли. Тогда поток солнечного излучения, приходящего на планету, составит

$$F = \frac{L_0}{4\pi r^2}.$$

Здесь L_0 – светимость Солнца. Количество энергии, которое планета отразит в космическое пространство, выражается формулой:

$$L_1 = \pi R^2 AF = \frac{L_0 R^2 A}{4r^2}.$$

Здесь R и A – радиус и сферическое альбедо планеты. Поток световой энергии от планеты на Земле будет равен

$$f = \frac{L_1}{4\pi d^2} = \frac{L_0 R^2 A}{16\pi d^2 r^2}.$$

Видимый радиус планеты с Земли, очевидно, составит R/d, а видимая площадь диска

$$S = \frac{\pi R^2}{d^2}.$$

Поверхностная яркость единицы видимой площади есть

$$I = \frac{f}{S} = \frac{L_0 R^2 A}{16\pi d^2 r^2} \cdot \frac{d^2}{\pi R^2} = \frac{L_0}{16\pi^2} \cdot \frac{A}{r^2}.$$

Мы видим, что поверхностная яркость полного диска не зависит ни от размеров планеты, ни от ее расстояния до пункта наблюдения (который совершенно необязательно должен быть на Земле). Она определяется только сферическим альбедо планеты и ее расстоянием до Солнца. Нам нужно лишь посчитать отношение A/r^2 для всех планет, включая Землю, пользуясь справочными данными. Результаты этих расчетов приведены в таблице. Для Меркурия и Марса даются два значения, соответствующие перигелию и афелию их вытянутых орбит.

Самая большая поверхностная яркость – у Венеры. Поверхностная яркость Меркурия подвержена сильным вариациям из-за вытянутости его орбиты, но он всегда занимает второе место, а наша планета Земля –

Планета	r, а.е.	A	A/r^2
Меркурий	0.307 – 0.467	0.10	1.06 – 0.46
Венера	0.723	0.65	1.24
Земля	1	0.37	0.37
Марс	1.382 – 1.666	0.15	0.079 – 0.054
Юпитер	5.203	0.52	0.019
Сатурн	9.539	0.47	0.0052
Уран	19.191	0.51	0.0014
Нептун	30.061	0.41	0.00045

лишь третье. Далее планеты располагаются в порядке их удаления от Солнца, от Марса до Нептуна.

Полученные соотношения остаются в целом справедливыми и для любого другого взаимного расположения Солнца, планеты и наблюдателя, если брать в расчет поверхностную яркость освещенной части диска (умножая величину площади S на значение фазы Φ).

Вега и Арктур – настоящее (О.С. Угольников)

Класс: **11** Задача: **5**

? Визуальные звездные величины Веги (спектральный класс A) и Арктура (спектральный класс K) составляют 0.03^m и -0.05^m. Какая из этих звезд ярче в фотометрической полосе U? B? V? R?

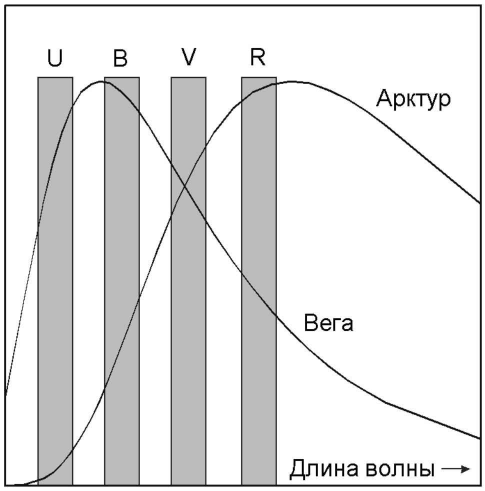
! Как известно, визуальная звездная величина – по сути, другое название звездной величины в фотометрической системе V, спектральная кривая которой близка к кривой видимости человеческого глаза (само обозначение индекса происходит от слово "*visual*"). Поэтому мы можем сразу сказать, что в полосе V Арктур, пусть и очень ненамного, но ярче Веги.

Чтобы ответить на вопрос о других спектральных полосах, вспомним, что для белых звезд спектрального класса A, к которым относится Вега, основные показатели цвета (U–B, B–V, V–R) близки к нулю. Соответственно, и сама звездная величина Веги во всех четырех полосах равна примерно 0^m.

Арктур является оранжевой звездой спектрального класса K, для которой все три указанных выше показателя цвета – положительные и составляют около $+1^m$. То есть, звездные величины Арктура в полосах U и B – положительные, и в них он светит слабее Веги. Другими словами, красный холодный Арктур в ультрафиолетовой и синей области спектра не столь ярок, как белая Вега.

Показатель цвета V–R у Арктура также положительный, и его звездная величина в полосе R – отрицательна. В ней Арктур существенно ярче

Веги, примерно на эту полосу приходится максимум в спектре Арктура. Это же видно на схематическом рисунке, где условно показаны спектры Арктура и Веги и четыре фотометрические полосы. Итак, Вега ярче в полосах U и B, Арктур ярче в полосах V и R.



Вега и Арктур – будущее (Е.Н. Фадеев)

Класс: 11 Задача: 6

? Звезда Вега имеет видимую звездную величину 0.03ᵐ, годичный параллакс 0.13″, лучевую скорость −14 км/с и собственное движение 0.35″/год. Звезда Арктур имеет звездную величину −0.05ᵐ, годичный параллакс 0.089″, лучевую скорость −5.3 км/с и собственное движение 2.3″/год. Станет ли когда-нибудь Вега ярче Арктура на небе? Если станет, то когда? Светимость звезд считать постоянной во времени, межзвездным поглощением пренебречь.

! Пусть m – звездная величина Веги и Арктура, когда они сравняются, а $m_{0\text{В}}$ и $m_{0\text{А}}$ – их звездные величины в настоящий момент времени ($t=0$). Обозначим через r_0 и r величины расстояния до звезды в начальный и искомый момент времени соответственно. Аналогичные обозначения вводим для величин параллакса π. Тогда для каждой из звезд

$$m - m_0 = -2.5\lg\frac{r_0^2}{r^2} = 5\lg(\pi_0 r).$$

Пусть в некоторый момент звездные величины Веги и Арктура сравниваются:

$$m_{0B} + 5\lg(r_B\pi_{0B}) = m_{0A} + 5\lg(r_A\pi_{0A}).$$

Из этого уравнения следует:

$$m_{0B} - m_{0A} = 5\lg\frac{r_A\pi_{0A}}{r_B\pi_{0B}} = 5\lg\frac{r_A}{r_B} + 5\lg\frac{\pi_{0A}}{\pi_{0B}}.$$

Введем обозначение:

$$K \equiv \frac{r_A^2}{r_B^2}.$$

Для этой величины мы получаем:

$$K = 10^{0.4(m_{0B}-m_{0A})}\frac{\pi_{0B}^2}{\pi_{0A}^2} = 2.3.$$

Фактически мы получили соотношение расстояний двух звезд, при выполнении которого они будут иметь одинаковую звездную величину. Зная, как изменяются расстояния во времени, можно найти те моменты времени, когда это соотношение истинно. Нам известны лучевые скорости звезд v_R. Пользуясь данными о собственном движении, мы можем получить значение тангенциальной скорости. Для этого мы учитываем, что на расстоянии r_0 (выраженном в парсеках) угол в 1″ будет соответствовать r_0 астрономических единиц. Тогда

$$v_T = 4.74\,\mu_0 r_0 = 4.74\frac{\mu_0}{\pi_0}.$$

Здесь численный коэффициент необходим для перевода значения скорости из а.е./год в км/с. Проведем координатную ось Oy от наблюдателя к звезде, а ось Ox – перпендикулярно, вдоль тангенциального движения звезды. В этой системе легко записать зависимость координат звезды от времени:

$$x = v_T\cdot t,\quad y = r_0 + v_R\cdot t.$$

Расстояние до звезды в момент времени t составит

$$r^2 = x^2 + y^2 = r_0^2 + v_R^2 t^2 + v_T^2 t^2 + 2r_0 v_R t = r_0^2 + v^2 t^2 + 2r_0 v_R t.$$

Здесь v – полная пространственная скорость звезды. Подставляя численные данные, получаем, что скорость Веги v_B составляет 19 км/с, скорость Арктура v_A – 123 км/с. Звездные величины обеих звезд сравняются, если выполнится условие:

$$\frac{v_A^2 t^2 + r_{0A}^2 + 2r_{0A}v_{RA}t}{v_B^2 t^2 + r_{0B}^2 + 2r_{0B}v_{RB}t} = K.$$

Это равенство можно записать в виде квадратного уравнения относительно величины t:

$$(v_A^2 - Kv_B^2)t^2 + 2(r_{0A}v_{RA} - Kr_{0B}v_{RB})t + (r_{0A}^2 - Kr_{0B}^2) = 0.$$

Решая уравнение, мы получаем два корня:

$$t_{1,2} = \frac{-(r_{0A}v_{RA} - Kr_{0B}v_{RB}) \pm \sqrt{(r_{0A}v_{RA} - Kr_{0B}v_{RB})^2 - (v_A^2 - Kv_B^2)(r_{0A}^2 - Kr_{0B}^2)}}{v_A^2 - Kv_B^2}.$$

Здесь величины расстояний до звезд нужно перевести в километры. Значение времени будет выражено в секундах. Подставив числа и переведя время в годы, получим, что блеск Арктура и Веги сравнивались около 40 тысяч лет назад и снова сравняются через 15 тысяч лет. В задаче спрашивается о равенстве блеска в будущем, поэтому окончательным ответом будет 15 тысяч лет.