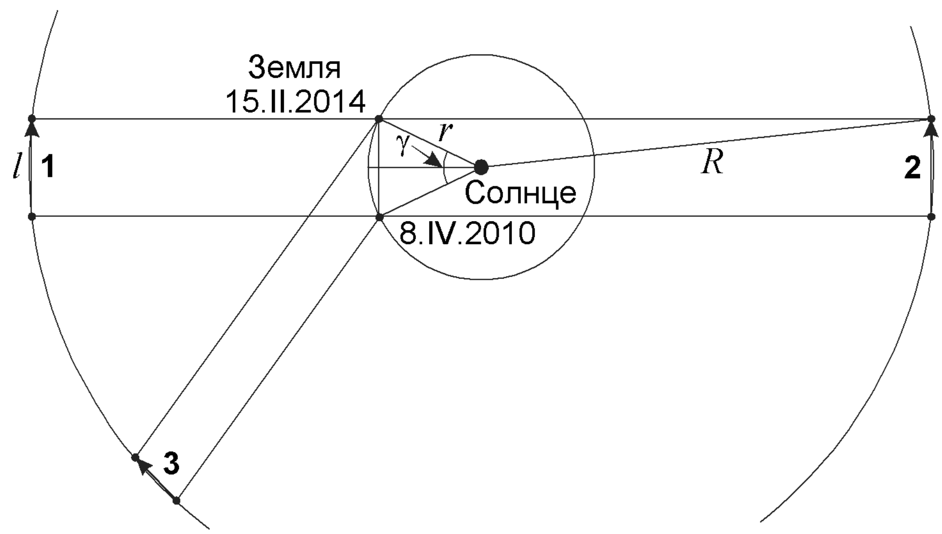
Две Олимпиады (О.С. Угольников)

Класс: 9 10 11 Задача: 1

? В середине двух олимпиад, проходящих в Краснодарском крае – XVII Всероссийской олимпиады по астрономии (Анапа, 8 апреля 2010 г.) и XXII Зимних Олимпийских игр (Сочи, 15 февраля 2014 г.) некий транснептуновый объект с круговой орбитой наблюдается в одной и той же точке неба (относительно звезд). Найдите минимально возможное значение радиуса орбиты этого объекта. Орбиту Земли считать также круговой, астрономической аберрацией пренебречь.

! Изобразим на рисунке орбиту Земли и ее положения в две указанные даты.



За период между этими датами Земля совершила три полных оборота вокруг Солнца и сделала большую часть четвертого оборота, до его завершения ей осталось пройти дугу с углом γ. Считая орбиту Земли круговой и ее движение по ней равномерным, находим этот угол:

$$\gamma = 360^{\circ}\,\frac{52}{365.25} = 51^{\circ}.$$

Здесь было принято, что продолжительность года составляет ровно 365.25 суток, и положения Земли 8 апреля 2010 и 2014 годов совпадают. Тогда четвертый оборот Земля завершит 8 апреля 2014 года, то есть через 52 дня после середины XXII зимних Олимпийских игр. Расстояние между двумя положениями Земли составляет

$$l = 2r\sin\frac{\gamma}{2} = 0.86 \text{ а.е.}$$

По условию задания, в обе даты транснептуновый объект оказывается в одной и той же точке неба. Это означает, что направления от Земли к этому объекту в эти даты параллельны друг другу. Объект движется по круговой орбите с радиусом, большим радиуса Нептуна (чей период обращения составляет 165 лет), и за 4 неполных года сделал лишь малую часть своего оборота вокруг Солнца. Его перемещение за это время с хорошей точностью можно считать отрезком прямой линии.

Так как требуется найти минимально возможное значение радиуса орбиты объекта, нужно рассмотреть случай, при котором скорость и перемещение будут максимальными. Из рисунка видно, что в плоскости эклиптики этот случай достигается в положениях 1 и 2, когда перемещение объекта происходит параллельно линии перемещения Земли между указанными датами. В других положениях (в частности, в положении 3) перемещение и скорость объекта будут меньшими.

Объект может и не находиться в плоскости эклиптики, но и в этом случае максимально возможное перемещение объекта составит 0.86 а.е. Время между двумя датами, выраженное в годах, составляет

$$t = 4 - \frac{52}{365.25} = 3.86.$$

Скорость объекта получается равной (0.86/3.86) или 0.223 а.е. в год, что чуть более 1 км/с. По III закону Кеплера получаем соотношение между орбитальной скоростью v и радиусом круговой орбиты a:

$$\frac{a^3}{T^2} = a\left(\frac{a}{T}\right)^2 = \frac{av^2}{4\pi^2} = const; \quad av^2 = const.$$

Земля движется по орбите с радиусом 1 а.е. со скоростью (2π) а.е. в год. Следовательно, радиус орбиты транснептунового объекта, выраженный в астрономических единицах, составляет

$$R = \left(\frac{2\pi}{0.223}\right)^2 = 790.$$

Объект располагается значительно дальше пояса Койпера и, по-видимому, относится к внутренним областям облака Оорта.

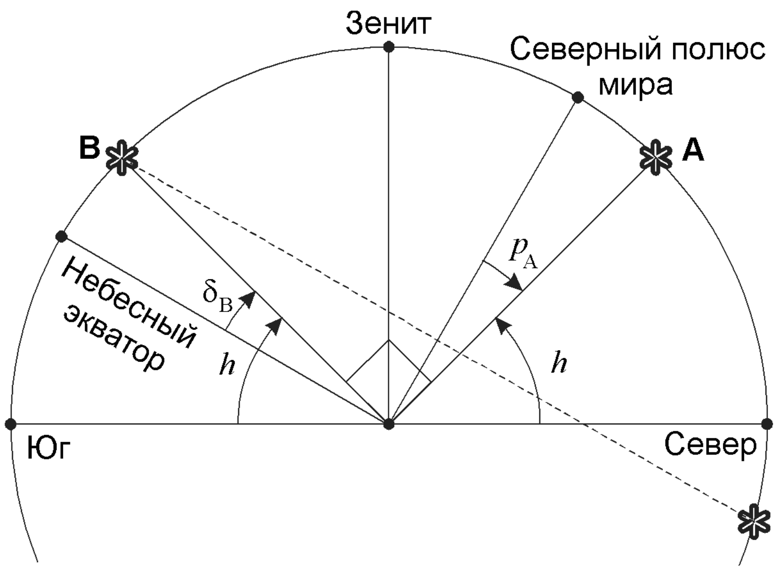
Две звезды – Россия (Е.Н. Фадеев, О.С. Угольников)

Класс: **9** Задача: **2**

? Северное полярное расстояние звезды А равно склонению звезды В. Верхняя кульминация звезды В происходит на той же высоте, что и нижняя кульминация звезды А. Будет ли видно звезду В во время ее нижней кульминации, если наблюдатель находится в средней полосе России?

! Обозначим широту буквой φ, высоту — h, зенитное расстояние $z = 90° - h$, склонение δ, северное полярное расстояние $p = 90° - \delta$. Обратим внимание, что полярное расстояние любой точки небесной сферы (в том числе звезды **A**) — величина положительная, следовательно, склонение звезды **B** положительно. Верхняя кульминация звезды **B** в северном полушарии происходит над горизонтом, как и нижняя кульминация звезды **A**. Таким образом, звезда **A** также располагается севернее небесного экватора.

Очевидно, что ответ на задачу не зависит от значений прямых восхождений звезд **A** и **B**. Поэтому мы можем считать их любыми. В частности, мы можем предположить, что они отличаются на 12 часов. Тогда верхняя кульминация звезды **B** происходит одновременно с нижней кульминацией звезды **A**. Нарисуем небесную сферу в проекции на плоскость небесного меридиана в этот момент. Укажем на рисунке зенит, Северный полюс мира и проекцию небесного экватора.



Прямые восхождения звезд отличаются на 12 часов, и они располагаются по разные стороны от Северного полюса мира. Укажем углы, соответствующие склонению звезды **B** (δ_B) и северному полярному расстоянию звезды **A** (p_A). Они отсчитываются в одну сторону от взаимно-перпендикулярных направлений на небесный экватор и Северный полюс мира соответственно. При этом по условию задачи они равны друг другу. Следовательно, направления от наблюдателя на звезды **A** и **B** также образуют прямой угол. Из равенства их высоты над горизонтом вытекает значение самой высоты: 45°.

Теперь мы знаем, что высота звезды **B** в верхней кульминации составляет 45°, причем кульминирует эта звезда южнее зенита. Тогда справедливо соотношение:

$$45° = 90° - \varphi + \delta_B;$$
$$\varphi - \delta_B = 45°.$$

Здесь φ — широта места наблюдения. Пренебрегая рефракцией, запишем условие видимости звезды **B** в момент ее нижней кульминации:

$$-90° + \varphi + \delta_B > 0.$$

С учетом предыдущей формулы:

$$-90° + \varphi + (\varphi - 45°) > 0; \quad \varphi > 67.5°.$$

Полученное неравенство справедливо только за Северным полярным кругом и не может относиться к средней полосе России. Поэтому звезда **B** во время своей нижней кульминации будет располагаться под горизонтом и не сможет наблюдаться.

Два календаря (Е.Н. Фадеев)

Класс: 9 10 Задача: 3

? Когда в последний раз совпадало начало нового года в Григорианском и Юлианском календарях? Когда такое совпадение может случиться снова? Считать, что начало года всегда приходилось и будет приходиться на 1 января, а календари использовались и будут использоваться в искомые годы.

! Цикл григорианского календаря, то есть время, по истечении которого порядок високосных годов в точности повторяется, составляет 400 лет. За это время григорианский и юлианский календари расходятся на 3 дня, поскольку за 400 лет в григорианском календаре на 3 високосных года меньше, чем в юлианском.

Сейчас два календаря расходятся на 13 дней. Последний раз начало года будет различаться на 13 дней в 2100 году. Этот год будет високосным в юлианском календаре, но не будет таковым в григорианском, и после февраля 2100 года разница увеличится на 1 день. Различие в 12 дней набегает за $12\cdot(400/3)=1600$ лет. То есть, последний раз начало года в обоих календарях отличалось на один день в $2100-1600=500$ году. Надо учесть, что 400 год был високосным в обоих календарях. Значит, разница в один день появилась только в феврале 300 года, который был високосным по юлианскому календарю и простым – по григорианскому.

Итого, последний раз начало года в юлианском и григорианском календарях совпадало 1 января 300 г. н.э.

В следующий раз оба начала календарных года совпадут только тогда, когда разница между ними составит 1 календарный год. Разность в 363 дня накопится за $363\cdot(400/3)=48400$ лет или за 121 четырехсотлетний цикл. Если учесть, что в первый раз начало календарного года в обоих календарях совпало 1 января 201 года, то после 1 января 48601 года разница в началах года в первый раз достигнет 363 дней; после 1 января 48701 года – 364 дней. Год 48800 является високосным в обоих календарях, поэтому совпадение начала года произойдет после 48900 года. Остается уточнить, когда именно.

48900 год будет високосным в юлианском календаре и простым – в григорианском календаре. Как и в предыдущем 48899 году, разница между ними составит 364 дня. 1 января 48900 года по старому стилю совпадет с 31 декабря 48900 года по новому стилю. На следующий день наступит 48901 год по григорианскому календарю. В феврале этого года в юлианском календаре будет вставлен дополнительный день. Таким образом, 1 января 48902 года григорианского календаря совпадет с 1 января 48901 года юлианского календаря.

Меркурий (М.Е. Прохоров)

Класс: **9** Задача: **4**

? На северном полюсе Меркурия установили горизонтальные солнечные часы. В каких пределах будет меняться угловая скорость (в градусах за земные сутки) тени от вертикального столба этих часов? Могут ли такие часы дать достоверную информацию о времени? Меркурий движется вокруг Солнца по эллиптической орбите с эксцентриситетом 0.205 и орбитальным периодом 88 дней. Оборот вокруг оси Меркурий совершает за 2/3 орбитального периода в том же направлении. Плоскость экватора Меркурия совпадает с плоскостью его орбиты, рельеф планеты не учитывать.

! Так как плоскости орбиты Меркурия и его экватора совпадают, при наблюдении с полюса планеты с условием его ровной поверхности Солнце будет располагаться на горизонте, и половина его большого диска будет освещать солнечные часы. Обозначим орбитальный период Меркурия через T. Средняя угловая скорость орбитального вращения планеты составит

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{360^{\circ}}{T} = 4.09^{\circ} / \text{сут}.$$

Здесь R – среднее расстояние Меркурия от Солнца, а v_0 – круговая скорость на этом расстоянии. За счет эксцентриситета орбиты Меркурия мгновенная угловая скорость будет существенно изменяться. Значение орбитальной угловой скорости Меркурия достигает максимума в перигелии, когда планета располагается на расстоянии L_P. В это время она будет двигаться перпендикулярно радиус-вектору со скоростью v_P, и угловая скорость составит

$$\omega_P = \frac{v_P}{L_P} = \frac{v_0}{R(1-e)}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \omega_0\sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}}.$$

Когда Меркурий окажется в афелии, угловая скорость достигнет минимума и будет равна

$$\omega_A = \frac{v_A}{L_A} = \frac{v_0}{R(1+e)}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \omega_0\sqrt{\frac{1-e}{(1+e)^3}}.$$

Орбитальное движение Меркурия приводит к видимому движению Солнца относительно звезд с запада на восток (как и на Земле), которое будет частично компенсировать его суточное движение вместе с небесной сферой. Последнее происходит с постоянной угловой скоростью

$$\omega = \frac{3}{2}\omega_0.$$

В результате, угловая скорость движения Солнца (и тени от столба) в перигелии и афелии составит

$$\Omega_P = \omega - \omega_P = \omega_0\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}}\right) = -0.05\,\omega_0 = -0.2^{\circ}\,/\text{сут}.$$

$$\Omega_A = \omega - \omega_A = \omega_0\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1-e}{(1+e)^3}}\right) = +0.83\,\omega_0 = +3.4^{\circ}\,/\text{сут}.$$

Знак "−" в первой формуле указывает, что вблизи перигелия Солнце "разворачивается" в своем видимом движении по небу и начинает смещаться в обратную сторону. Затем происходит обратный "разворот", и Солнце вновь движется слева направо, достигая максимума угловой скорости в афелии Меркурия. Очевидно, что некоторые положения тени столба будут соответствовать сразу нескольким моментам в течение меркурианских суток, и часы не смогут дать однозначной информации о времени.

“Аполлон-11” (О.С. Угольников)

Класс: 9 10 Задача: 5

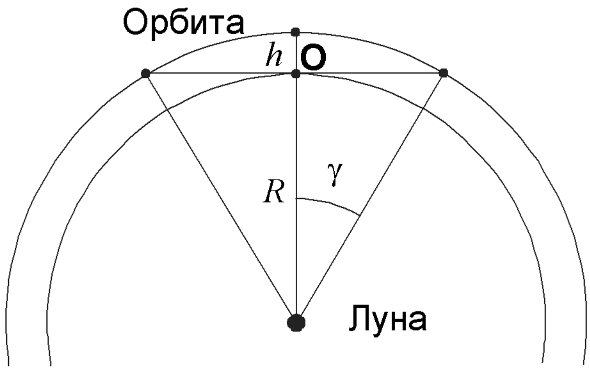
? В июле 1969 года американские астронавты Нил Армстронг и Эдвин Олдрин совершили посадку на поверхность Луны и провели на ней 21 час 36 минут. Сколько раз они могли выходить на прямую связь (без участия Земли) с третьим членом экипажа Джоном Коллинзом, и какова могла быть максимальная длительность каждого сеанса? Коллинз находился в командном модуле, обращающимся вокруг Луны по круговой орбите, проходящей над местом прилунения Армстронга и Олдрина на высоте 111 км. Орбитальное и осевое вращение Луны не учитывать.

! Изобразим Луну и орбиту командного модуля, проходящую над местом посадки (точка **О**). Обозначим радиус Луны через R, а высоту модуля над поверхностью Луны − через h.

Определим, при каком угловом перемещении по орбите γ (относительно положения над местом посадки) командный модуль окажется на лунном горизонте:

$$\gamma = \arccos\frac{R}{R+h} = 20^{\circ}.$$

Получается, что прямую связь с Джоном Коллинзом можно было поддерживать, пока командный модуль располагался внутри 40°-дуги своей орбиты, что составляет 1/9 часть ее полной длины. Найдем теперь орбитальный период командного модуля:



$$t = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}.$$

Здесь M – масса Луны. Численная подстановка дает результат: 1.98 часа. За время T, которое Нил Армстронг и Эдвин Олдрин провели на Луне (21.6 часа), командный модуль почти завершил 11 оборотов. Именно столько сеансов прямой связи можно было организовать за данный период. Продолжительность каждого сеанса могла составлять 1/9 орбитального периода t, то есть 13.2 минуты.

Шаровое скопление (А.М. Татарников)

Класс: 9 Задача: 6

? Шаровое скопление имеет видимый диаметр 18.8′, в его пределах поверхностная яркость на 40% превосходит яркость окружающего фона неба. Определите интегральную звездную величину скопления, если яркость 1 квадратной секунды фона неба соответствует звезде 21^m.

! Сначала определим видимую площадь шарового скопления с видимым диаметром d:

$$S = (\pi d^2)/4,$$

что составляет 278 квадратных минут или (с хорошей точностью) 1 миллион квадратных секунд. В пределах этой площади к яркости ночного неба добавляется еще и свечение самого скопления, составляющее 0.4 или (1/2.5) от фона неба. Следовательно, поверхностная яркость скопления на 1^m слабее ночного неба и составляет 22^m с квадратной секунды.

Вспомним, что отношение яркости в 100 раз соответствует разнице блеска в 5^m, в 10000 раз – 10^m, а в 1 000 000 раз – 15^m. В итоге, общий блеск шарового скопления составляет $22 - 15 = 7^m$.