11 класс

11.1. **Ответ.** Не существуют.

Рассмотрим произвольные ненулевые числа $a_1, \ldots, a_{10}$. Заметим, что числа a_k и $\dfrac{1}{a_k}$ имеют одинаковый знак. Значит,

$$\left|a_k + \frac{1}{a_k}\right| = |a_k| + \frac{1}{|a_k|} > \max\left(|a_k|, \frac{1}{|a_k|}\right) \geqslant \left|a_k - \frac{1}{a_k}\right| \geqslant 0.$$

Перемножая эти неравенства, получаем, что

$$\left|a_1 + \frac{1}{a_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right| > \left|a_1 - \frac{1}{a_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right|,$$

то есть требуемое равенство невозможно.

11.2. **Первое решение.** Пронумеруем строки числами $1, \ldots, n$ сверху вниз, а столбцы — теми же числами слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров её строки и столбца; при этом будем считать, что клетки диагонали из плюсов имеют координаты (i, i) $(i = 1, \ldots, n)$.

Заметим, что если четыре клетки лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, то любая операция либо не меняет знаков в этих клетках, либо меняет знаки ровно в двух клетках из четырёх. В частности, чётность количества плюсов в этих четырёх клетках не меняется; значит, если среди них вначале был ровно один плюс, то и потом их будет не менее одного.

Теперь выберем в нашей таблице n непересекающихся таких четвёрок; по сказанному выше, после любых операций в каждой из них найдётся как минимум один плюс, следовательно, всего плюсов будет не менее n. При $i = 1, 2, \ldots, n-2$ выберем четвёрку клеток $\{(i,i), (i,i+1), (i+2,i), (i+2,i+1)\}$, а также выберем четвёрки $\{(n-1,n-1), (n-1,n), (1,n-1), (1,n)\}$ и

1	1		4	4
5	2	2		5
1	1	3	3	
	2	2	4	4
5		3	3	5

Рис. 5

$\{(n,n), (n,1), (2,n), (2,1)\}$. Легко видеть, что они удовлетворяют всем требованиям. На рис. 5 отмечены такие четвёрки при $n = 5$.

Второе решение. Заметим, что знак, стоящий в клетке, изменяется ровно тогда, когда с этой клеткой было проделано нечётное число операций. Пусть есть ровно r строк и ровно c столбцов, к каждому из которых операция применялась нечётное число раз (назовём их *нечётными*). Тогда знак изменился ровно в $r(n-c)$ клетках, стоящих на пересечении нечётных строк с чётными столбцами, и в $c(n-r)$ клетках, стоящих на пересечении чётных строк с нечётными столбцами. Теперь нетрудно понять, что, если бы мы вместо исходных операций применили бы по одой операции ровно ко всем чётным строкам и столбцам, результат получился бы тем же самым, но при этом числа r и c заменилось бы на $n-r$ и $n-c$ соответственно. Значит, можно считать, что $r + c \leqslant n$.

Далее, среди изменённых $r(n-c) + c(n-r)$ знаков не более, чем $r + c$ были плюсами (максимум по одному в r строках, и максимум по одному в c столбцах); значит, хотя бы $r(n-c)+c(n-r)-(r+c)$ минусов стали плюсами, и хотя бы $n-(r+c)$ плюсов остались плюсами. Таким образом, общее количество плюсов P стало не меньше, чем $r(n-c)+c(n-r)-(r+c)+n-(r+c) = -2rc+(r+c)(n-2)+n$. Теперь, поскольку $2rc \leqslant \frac{(r+c)^2}{2}$, получаем $P \geqslant (r+c)(n-2) - \frac{(r+c)^2}{2} + n = (r+c)\left(n - 2 - \frac{r+c}{2}\right) + n \geqslant n$ (ибо $n - 2 - \frac{r+c}{2} \geqslant n - 2 - \frac{n}{2} \geqslant 0$), что и требовалось доказать.

11.3. Заметим, что точка I_1 лежит на биссектрисах AM_2 и BM_4 углов BAC и ABD, поэтому $I_1 = AM_2 \cap BM_4$ (см. рис. 6). Аналогично $I_2 = BM_3 \cap CM_1$, $I_3 = CM_4 \cap DM_2$, $I_4 = DM_1 \cap AM_3$. Поскольку $\overset{\smile}{AM_1} + \overset{\smile}{CM_3} = \overset{\smile}{BM_1} + \overset{\smile}{DM_3}$, прямая M_1M_3 составляет равные углы с хордами AC и BD; следовательно, прямая M_1M_3 параллельна биссектрисе угла AKB, то есть прямой I_1I_3. Аналогично, $M_2M_4 \parallel I_2I_4 \perp I_1I_3$ (поскольку внешняя и внутренняя биссектрисы угла перпендикулярны).

Если прямые I_1I_3 и M_1M_3, а также I_2I_4 и M_2M_4 совпа-

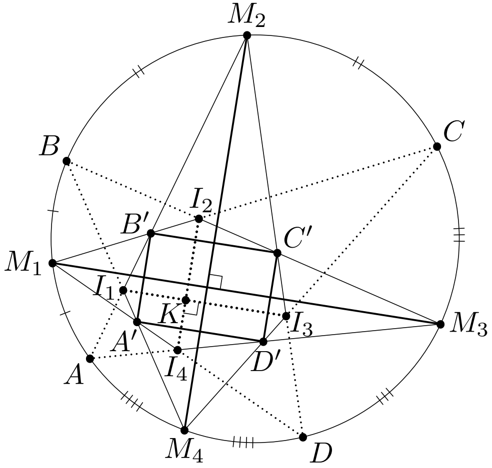

Рис. 6

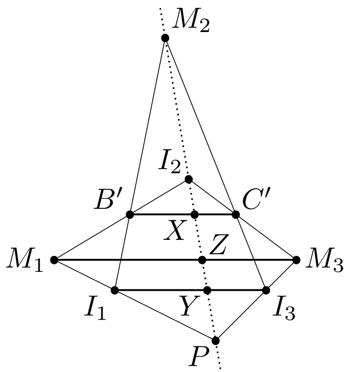

Рис. 7

дают, утверждение задачи очевидно. Пусть, скажем, точка I_1 не лежит на прямой M_1M_3. Обозначим $A' = DM_1 \cap BM_4$, $B' = AM_2 \cap CM_1$, $C' = BM_3 \cap DM_2$, $D' = AM_3 \cap CM_4$. Имеем $\angle BM_1M_2 = \angle CM_1M_2$ и $\angle BM_2M_1 = \angle AM_2M_1$, поэтому треугольники M_1M_2B и M_1M_2B' симметричны относительно прямой M_1M_2. Отсюда $M_2B' = M_2B$. Аналогично $M_2C' = M_2C$, и из $M_2B = M_2C$ получаем $M_2B' = M_2C'$. Поскольку $\angle AM_2M_4 = \angle DM_2M_4$, прямая M_2M_4 является биссектрисой (и, значит, высотой) равнобедренного треугольника $M_2B'C'$. Таким образом, $B'C' \perp M_2M_4$, поэтому $B'C' \parallel M_1M_3 \parallel I_1I_3$.

Пусть прямая M_2I_2 пересекает отрезки $B'C'$, I_1I_3 и M_1M_3 соответственно в точках X, Y, Z (см. рис. 7). Рассматривая гомотетии с центрами I_2 и M_2, получаем: $\frac{M_1Z}{M_3Z} = \frac{B'X}{C'X} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Пусть $P = M_1I_1 \cap M_3I_3$. Если прямая PY пересекает M_1M_3 в точке Z', то из гомотетии с центром P получаем: $\frac{M_1Z'}{M_3Z'} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Значит, Z' совпадает с Z. Получаем, что точка P лежит на прямой M_2I_2. Аналогично, P лежит на прямой M_4I_4, то есть все четыре прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в точке P.

Замечание 1. Точки A', B', C', D' являются центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD, BAC, CBD, DAC соответственно.

Замечание 2. В последнем абзаце решения по сути используется теорема о трёх гомотетиях (для гомотетий, переводящих отрезки $B'C'$, M_1M_3, I_1I_3 друг в друга).

11.4. **Ответ.** $k = [n/2]$.

Лемма. *Для любых точек $A_i = (x_i, y_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, найдётся такой многочлен $P(x, y)$ степени не больше $[n/2]$, что $P(x_n, y_n) = 1$ и $P(x_i, y_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, n-1$.*

Доказательство. Заметим, что существуют такие $d = [n/2]$ прямых, что точка A_n не лежит ни на одной из них, а каждая из точек $A_1, \ldots, A_{n-1}$ лежит хотя бы на одной (при нечётном n это прямые A_1A_2, A_3A_4, …, $A_{n-2}A_{n-1}$, а при чётном n — прямые A_1A_2, A_3A_4, …, $A_{n-3}A_{n-2}$, $A_{n-2}A_{n-1}$). Пусть $k_ix + \ell_iy + m_i = 0$ — уравнение i-й прямой $(i = 1, \ldots, d)$. Тогда многочлен

$$Q(x, y) = \frac{(k_1x + \ell_1y + m_1)\ldots(k_dx + \ell_dy + m_d)}{(k_1x_n + \ell_1y_n + m_1)\ldots(k_dx_n + \ell_dy_n + m_d)}$$

является искомым. □

Покажем, что число $k = [n/2]$ подходит. При каждом $i = 1, \ldots, n$ найдём согласно лемме многочлен $P_i(x, y)$, обращающийся в ноль во всех точках $A_1, \ldots, A_n$, кроме A_i, причём $P_i(x_i, y_i) = 1$. Тогда многочлен $P(x) = c_1P_1(x, y) + \ldots + c_nP_n(x, y)$ принимает требуемые значения во всех точках $A_1, \ldots, A_n$.

Осталось показать, что при $k < [n/2]$ утверждение неверно. Рассмотрим точки $A_i(i, i^2)$ $(i = 1, \ldots, n)$, лежащие на параболе $y = x^2$, и положим $c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, $c_n = 1$. Поскольку парабола пересекается с прямой не более, чем по двум точкам, точки A_i удовлетворяют условию. Предположим, что существует многочлен $P(x, y)$ степени, не превосходящей k, для которого $P(x_i, y_i) = c_i$. Положим $Q(x) = P(x, x^2)$; тогда степень $Q(x)$ не превосходит $2k$. По нашему предположению, $Q(1) = Q(2) = \ldots = Q(n-1) = 0$ и $Q(n) = 1$. Таким образом, ненулевой многочлен $Q(x)$ имеет $n-1$ корень, то есть его степень не меньше $n-1$; тогда и $2k \geqslant n-1$. Это и значит, что $k \geqslant [n/2]$.