11 класс

11.1. Существуют ли такие ненулевые действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{10}, что
$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_{10}+\frac{1}{a_{10}}\right)=\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_{10}-\frac{1}{a_{10}}\right)?$$
(*Н. Агаханов, И. Богданов*)

11.2. В клетчатой таблице $n\times n$ ($n\geqslant 4$) поставлены n знаков «$+$» в клетках одной диагонали и знаки «$-$» во всех остальных клетках. Разрешается в некоторой строке или в некотором столбце поменять все знаки на противоположные. Докажите, что после любого количества таких операций в таблице останется не менее n плюсов. (*Р. Карасёв*)

11.3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно. Докажите, что прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке. (*П. Кожевников*)

11.4. Дано натуральное число $n\geqslant 3$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение? Для любых n точек $A_i=(x_i,y_i)$ на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и любых вещественных чисел c_i ($1\leqslant i\leqslant n$) существует такой многочлен $P(x,y)$, степень которого не больше k, что $P(x_i,y_i)=c_i$ при всех $i=1,\ldots,n$.

(Многочленом от двух переменных называется функция вида
$$P(x,y)=a_{0,0}+a_{1,0}x+a_{0,1}y+a_{2,0}x^2+a_{1,1}xy+a_{0,2}y^2+\\+\ldots+a_{k,0}x^k+a_{k-1,1}x^{k-1}y+\ldots+a_{0,k}y^k.$$
Степенью ненулевого одночлена $a_{i,j}x^iy^j$ называется число $i+j$; степенью многочлена $P(x,y)$ называется наибольшая степень входящего в него одночлена.) (*Ф. Петров*)