Задача 2. Движение без проскальзывания

Применим второй закон Ньютона для груза, доски и бруска:

$$T - F_{\text{тр}} = m_1 a_1,$$

$$Mg - T = Ma_1,$$

$$F_{\text{тр}} - kx = m_2 a_2.$$

Здесь T — сила натяжения нити, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, x — удлинение пружины.

Пока $F_{\text{тр}} < \mu m_2 g$, проскальзывания не будет. Искомый путь L найдём из условия $a_1 = a_2$, или иначе:

$$\frac{Mg - \mu m_2 g}{m_1 + M} = \frac{\mu m_2 g - kx}{m_2}.$$

Отсюда:

$$L = \frac{g}{k}\frac{m_2}{m_1 + M} \cdot \Big(\mu(m_1 + m_2 + M) - M\Big).$$

Если:

$$\mu < \frac{M}{m_1 + m_2 + M} = \mu_{\min},$$

проскальзывание начинается сразу, то есть $L = 0$.

При достаточно большом коэффициенте трения μ система, будучи предоставленная самой себе, начнёт совершать колебательное движение с амплитудой $A = Mg/k$. Максимальное растяжение пружины равно $2A$. Тогда из условия $L_{\max} = 2A$, мы сможем определить минимальный коэффициент трения μ_0, при котором проскальзывания не будет:

$$\mu_0 = \frac{M}{m_2}\frac{2m_1 + m_2 + 2M}{m_1 + m_2 + M}.$$

Итак, если $\mu > \mu_0$, то $L \to \infty$.

Если:

$$\frac{M}{m_1 + m_2 + M} < \mu < \mu_0 = \frac{M}{m_2}\frac{2m_1 + m_2 + 2M}{m_1 + m_2 + M},$$

то:

$$L = \frac{g}{k}\frac{m_2}{m_1 + M} \cdot \Big(\mu(m_1 + m_2 + M) - M\Big).$$

Если:

$$\mu < \mu_{\min} = \frac{M}{m_1 + m_2 + M}, \qquad \text{то} \qquad L = 0.$$

Зависимость L от μ изображена на рисунке 25.

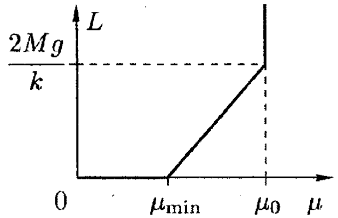


Рис. 25

Теперь вычислим время движения бруска до начала проскальзывания. При этом система движется по гармоническому закону:

$$L = \frac{Mg}{k}(1 - \cos\omega t),$$

где $\omega^2 = k/(m_1 + m_2 + M)$. Отсюда получим, что:

$$t = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + M}{k}} \cdot \arccos\left(1 - \frac{kL}{Mg}\right) \qquad \text{при} \qquad \mu \leqslant \mu_0,$$

а при $\mu > \mu_0$ проскальзывание никогда не начнётся.

Критерии оценивания

Записан второй закон Ньютона для всех движущихся тел	1
Определён $\mu_{\min}$	2
Определён μ_0	2
Найден характер движения при $\mu > \mu_0$	1
Найден путь при $\mu_{\min} < \mu < \mu_0$	2
Определено время движения бруска	2

Задача 3. Тепловая машина

Рассмотрим работу тепловой машины за время $\Delta t = 1$ с. Запишем выражение для КПД η цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{P}{P + P_2} = \frac{T_1 - T}{T_1}.$$

Здесь P — полезная мощность машины, P_2 — тепловая мощность, передаваемая холодильнику. Из этого выражения следует:

$$P = P_2\frac{T_1 - T}{T}.$$

Согласно условию задачи $P_2 = (Q_2)_{\Delta t = 1\,\text{с}} = \alpha(T - T_2)$.

Из этих соотношений следует:

$$P = \alpha\frac{(T - T_2)(T_1 - T)}{T} = \alpha\left[T_1 + T_2 - \left(T + \frac{T_1T_2}{T}\right)\right].$$

Величина $(T + T_1T_2/T)$ принимает минимальное значение при $T = T_m = \sqrt{T_1T_2} = 489{,}9$ К ≈ 490 К. Следовательно:

$$P_{\max} = \alpha\left[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2}\right] = \alpha\left[\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right]^2 \approx 120 \text{ кВт},$$

при этом:

$$\eta = \frac{T_1 - T_m}{T_m} = 38{,}7\ \%.$$

Критерии оценивания

Получено выражение для P через T_1, T_2 и T 4
Найдена температура, при которой мощность максимальна 3
Найдена максимальная мощность 2
Определено КПД 1

Задача 4. Движение заряженных частиц

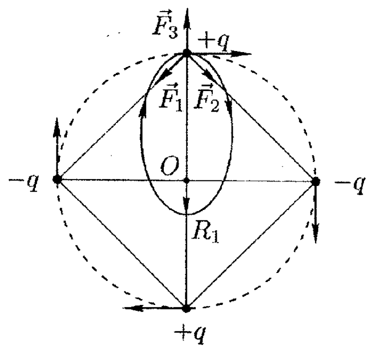


Рис. 26

1. Всилу симметрии все материальные точки будут двигаться по одинаковым траекториям, оставаясь в каждый момент времени на окружности некоторого переменного радиуса $r(t)$ в вершинах квадрата со сторонами, равными $a = \sqrt{2}r(t)$.

Рассмотрим одну из материальных точек. На неё действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ со стороны остальных частиц (рис. 26). По закону Кулона модули этих сил:

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2r^2}, \qquad F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4r^2}.$$

Результирующая сила всегда направлена к центру (точка O), а её модуль равен:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2r^2}\sqrt{2} - \frac{q^2}{4r^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}\right).$$

Отсюда следует, что каждая из материальных точек движется так, как если бы из центра её притягивал заряд, противоположный по знаку и по абсолютной величине равный

$$Q = q\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}\right)}.$$

Формула для $F(r)$ аналогична закону Кулона (или закону всемирного тяготения), так как $F(r) \sim 1/r^2$. Поэтому траектории точек — эллипсы с большой осью $R_0 + R_1$. Точка O находится в одном из фокусов этих эллипсов.

2. Характерное время — период T обращения по эллиптической орбите. Он может быть найден из третьего закона Кеплера.

Найдём сначала период T_0 обращения точечной массы m, движущейся под действием силы $F(r)$ по круговой орбите радиуса R_0:

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0}, \qquad \frac{mv_0^2}{R_0} = F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4}\right).$$

Из этих соотношений следует:

$$v_0 = q\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\sqrt{2} - 1}{4mR_0}}.$$

Такая скорость должна быть сообщена материальным точкам, чтобы они двигались по окружности радиуса R_0. Тогда:

$$T_0 = \frac{2\pi}{q}\sqrt{4\pi\varepsilon_0\frac{4mR_0^3}{2\sqrt{2} - 1}}.$$

По третьему закону Кеплера:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0 + R_1}{2R_0}\right)^3, \qquad \text{откуда} \qquad T = T_0\left(\frac{R_0 + R_1}{2R_0}\right)^{3/2}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для T_0, получим:

$$T = \frac{2\pi}{q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0\frac{m(R_0 + R_1)^3}{2\sqrt{2} - 1}}.$$

Критерии оценивания

Сделан вывод о характере движения точек 1
Определены силы, действующие на каждую точку 1
Найдено выражение для $F(r)$ 1
Определён эффективный заряд Q 1
Объяснено, почему точки движутся по эллипсу 1
Использован третий закон Кеплера 1
Записано уравнение движения точечной массы 1
Определён период T_0 2
Найдено выражение для T 1

Задача 5. Униполярный индуктор

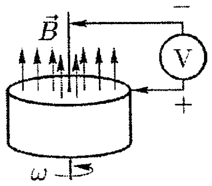


Рис. 27

1. На свободные электроны в проводящем слое при вращении диска действует сила Лоренца $F_л = evB$, где $e < 0$ — заряд электрона, $v = \omega r$ — линейная скорость. При указанных на рисунке 27 направлениях магнитного поля и вращения диска сила Лоренца направлена к центру диска. В результате возникает перераспределение зарядов: электроны будут перемещаться к центру, а на боковой поверхности образуется нескомпенсированный положительный заряд. Это приведёт к возникновению электрического поля $\vec{E}$, направленного по радиусу к центру. Равновесие наступит, когда в каждой точке проводящего слоя кулоновская сила скомпенсирует силу Лоренца:

$$eE = evB = e\omega rB, \qquad \text{то есть} \qquad E = vB.$$

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между боковой поверхностью диска ($r = r_0$) и его центром ($r = 0$) равна

$$\Delta\varphi = \int_0^r E dr = \frac{1}{2}\omega r_0^2 B.$$

Эта разность потенциалов и будет измерена вольтметром:

$$V = \Delta\varphi = \frac{1}{2}\omega r_0^2 B = \pi\nu r_0^2 B = 62{,}8 \cdot \text{мВ},$$

причём минус — в центре диска, а плюс — на боковой поверхности.

2. Диск разгоняется моментом силы Ампера, возникающей в результате взаимодействия радиально направленного тока с магнитным полем диска. В соответствии с правилом левой руки диск будет вращаться так же, как и на рисунке 27 — против часовой стрелки, если смотреть сверху. Разгон диска прекратится, когда сила тока станет равной нулю, то есть когда разность потенциалов $\Delta\varphi$, обусловленная действием силы Лоренца (смотри пункт 1), станет равной ЭДС батарейки:

$$\Delta\varphi = \mathscr{E}, \qquad \text{или} \qquad \pi\nu_{\text{пред}} r_0^2 B = \mathscr{E},$$

откуда $\nu_{\text{пред}} = \mathscr{E}/(\pi r_0^2 B) = 7{,}2 \cdot 10^4$ об/мин.

Критерии оценивания

Объяснена причина возникновения разности потенциалов 1
Записано условие равновесия 2
Определена $\Delta\varphi$ 2
Получено численное значение для V 1
Объяснена причина вращения диска 1
Записано условие прекращения разгона диска 2
Получено численное значение для $\nu_{\text{пред}}$ 1

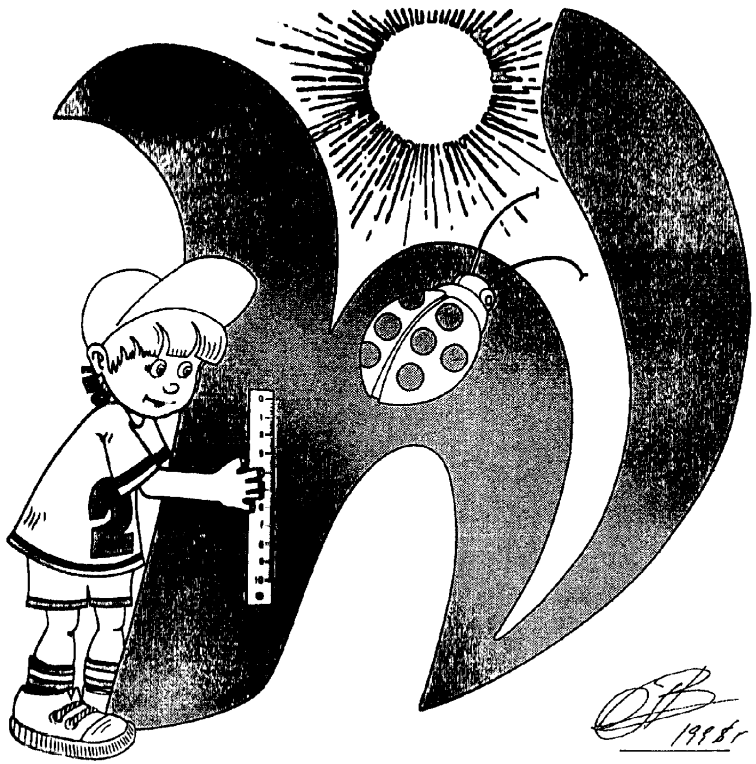
**Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников**

XLIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Белгород, 2010 г.