10 класс

10.5. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $ax^2+bx+c > cx$ при любом x. Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x. (*М. Мурашкин*)

Решение. Так как для всех x верно неравенство $P(x) = ax^2 + (b-c)x + c > 0$, то дискриминант трёхчлена $P(x)$ отрицателен: $D = (b-c)^2 - 4ac = b^2 + c^2 - 2bc - 4ac < 0$. Кроме того, $c = P(0) > 0$. Значит, у трехчлена $Q(x) = cx^2 - (b+c)x + (a+b)$ положителен старший коэффициент, а его дискриминант $D' = (b+c)^2 - 4c(a+b) = b^2 + c^2 + 2bc - 4ac - 4bc = D$ отрицателен. Это значит, что $Q(x) > 0$ при всех действительных x, что и требовалось доказать.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $Q(x) = (1-x)^2 P\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Комментарий. Если в решении присутствует только доказательство отрицательности дискриминанта D' (но не проверяется, что старший коэффициент $Q(x)$ положителен) — 4 балла. Доказано только, что $c > 0$ — 2 балла.

10.6. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через произвольную точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Треугольники PBA и PCB подобны, так как $\angle BPC$ — общий, а $\angle PBA = \angle PCB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. Значит, $\frac{BA}{BC} = \frac{PB}{PC}$. Аналогично, из подобия треугольников PDA и PCD следует, что $\frac{DA}{DC} = \frac{PD}{PC}$. Так как $PB = PD$, то $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$, или $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$; заметим, что тогда и $\frac{AB+CB}{AD+CD} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$.

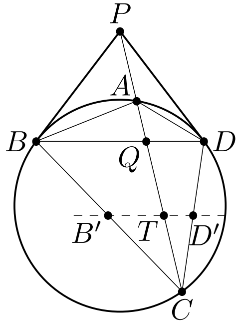


Рис. 2

Обозначим через Q точку пересечения отрезков AC и BD, а через T — произвольную точку на отрезке AC. Пусть для определенности T лежит на отрезке QC, а прямая, проходящая через T параллельно BD, пересекает CB и CD в точках B' и D', соответственно. Тогда по теореме Фалеса $\frac{CB'}{CD'} = \frac{CB}{CD} = \frac{AB+CB}{AD+CD}$, или $\frac{CB'}{AB+CB} = \frac{CD'}{AD+CD}$, что и требовалось.

Если же точка T лежит на отрезке AQ, то аналогично рассматриваются отрезки, высекаемые на сторонах AB и AD.

Комментарий. Доказано равенство $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ (или эквивалентное соотношение) — 2 балла.

10.7. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

(*В. Сендеров*)

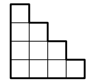
Ответ. Существуют.

Решение. Для натурального числа t тройка чисел $3t$, $-t$, $-2t$ удовлетворяет всем условиям, кроме, возможно, последнего. А чтобы сумма $(3t)^{13} + (-t)^{13} + (-2t)^{13} = t^{13}(3^{13} - 1 - 2^{13})$ являлась точным квадратом, достаточно положить, например, $t = 3^{13} - 1 - 2^{13}$.

Итак, условию задачи удовлетворяет, например, тройка чисел $3t$, $-t$, $-2t$, где $t = 3^{13} - 1 - 2^{13}$.

Комментарий. Только верный ответ (без предъявления конструкции) — 0 баллов. Имеется идея поиска решения в виде (ta, tb, tc), где a, b, c — фиксированные числа с нулевой суммой — 2 балла.

10.8. Назовём *лестницей высоты* n фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали (на рисунке показана лестница высоты 4). Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?



(*Д. Храмцов*)

Ответ. 2^{n-1}.

Решение. Отметим в каждом столбце лестницы по одной верхней клетке; назовём их объединение *верхним слоем*. Никакие две из n клеток этого слоя не могут лежать в одном прямоугольнике разбиения, поэтому в любом разбиении лестницы не менее n прямоугольников. С другой стороны, минимальная суммарная площадь n прямоугольников с различными площадями равна $1 + 2 + \ldots + n$, что совпадает с площадью всей лестницы. Значит, число прямоугольников в любом разбиении равно n, их площади выражаются числами $1, 2, \ldots, n$, и каждый из них содержит клетку верхнего слоя.

Покажем индукцией по n, что число требуемых разбиений лестницы высоты n равно 2^{n-1}. База индукции при $n = 1$ очевидна. Пусть утверждение индукции справедливо для лестницы высоты $n-1$; рассмотрим разрезание лестницы высоты n на прямоугольники площадей $1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим прямоугольник, покрывающий угловую (наиболее далекую от верхнего слоя) клетку лестницы. Он содержит клетку верхнего слоя, то есть сумма длин его сторон a и b равна $n + 1$. Поэтому его площадь $S = ab \geqslant a+b-1 = n$, так как $(a-1)(b-1) = ab-(a+b-1) \geqslant 0$; при этом равенство может достигаться лишь при $a = 1$ или $b = 1$. Поскольку площади прямоугольников разбиения не превосходят n, то $S = n$, и одна из сторон нашего прямоугольника равна 1, а другая — n. Такой прямоугольник можно выбрать двумя способами (вертикальный или горизонтальный), причем в обоих случаях после его отрезания остается лестница высоты $n-1$, количество способов разрезать которую на оставшиеся прямоугольники площадей $1, 2, \ldots, n-1$ равно 2^{n-2} по предположению индукции. Значит, искомое количество способов равно $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$, что и требовалось.

Комментарий. Предъявлен только верный ответ — 0 баллов.

Верное решение складывается из следующих продвижений.

а) Предъявлен верный ответ с предъявлением (возможно, по индукции) 2^{n-1} разбиений — 1 балл.

б) Показано, что число прямоугольников в разбиении не меньше n — 2 балла.

в) Показано, что число прямоугольников в разбиении не больше n, а в случае, когда их ровно n, их площади должны равняться $1, 2, \ldots, n$ — 1 балл.

г) Показано, что в разбиении имеется прямоугольник $1 \times n$ (покрывающий угловую клетку) — 3 балла.

Баллы за пункты а)–г) суммируются (сумма баллов равна 7).