Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа

XXXVI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2009–2010 учебный год

Первый день

19–20 января 2010 г.

Москва, 2009

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.А. Глазырин, С.А. Дориченко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, М.И. Исаев, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, М.В. Мурашкин, О.К. Подлипский, А.М. Райгородский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2009–2010 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 19 и 20 января 2010 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к некоторым задачам указаны рекомендуемые оценки (в баллах) предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

9 класс

9.1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 + 2a_1x + b_1$, $f_2(x) = x^2 + 2a_2x + b_2$, $f_3(x) = x^2 + 2a_3x + b_3$. Известно, что $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$. Докажите, что хотя бы один из этих трёхчленов имеет два корня. *(Н. Агаханов)*

Решение. Предположим противное; тогда дискриминанты всех трёхчленов неположительны, то есть $a_k^2 \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, 3)$. Левые (а значит, и правые) части этих неравенств неотрицательны, поэтому их можно перемножить, получая $(a_1a_2a_3)^2 \leqslant b_1b_2b_3$, то есть $N^2 \leqslant N$, где $N = a_1a_2a_3$. Но это противоречит неравенству $N > 1$.

Комментарий. Начато рассуждение от противного и получены неравенства $a_k^2 \leqslant b_k$ — 1 балл. При перемножении неравенств не обоснована законность такого перемножения — ставить не более 5 баллов.

9.2. Семь лыжников с номерами $1, 2, \ldots, 7$ ушли со старта по очереди и прошли дистанцию — каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что каждый лыжник ровно дважды участвовал в обгонах. (В каждом обгоне участвуют ровно два лыжника — тот, кто обгоняет, и тот, кого обгоняют.) По окончании забега должен быть составлен протокол, состоящий из номеров лыжников в порядке финиширования. Докажите, что в забеге с описанными свойствами может получиться не более двух различных протоколов. *(С. Волчёнков)*

Ответ. Заметим, что чётность места каждого лыжника менялась при любом обгоне; значит, его место на финише — той же чётности, что и на старте.

Решение. Так как скорости постоянны, каждые два лыжника встречались не более одного раза. Будем обозначать лыжников их стартовыми номерами.

Победителя никто не мог обогнать, значит, он сам обогнал двоих. Поэтому он — 3, и обогнал лыжников 1 и 2. Аналогично, финишировавший последним не мог никого обогнать, поэтому его обогнали двое, он — 5, и его обогнали 6 и 7. Далее, лыжник 1 не мог никого обогнать, то есть он финишировал третьим (и его, кроме 3, обогнал лыжник, финишировавший вторым), а лыжника 7 никто не мог обогнать, и он финишировал пятым (обогнав 5 и лыжника, финишировавшего шестым).

Итак, осталось выяснить, какими финишировали лыжники с чётными номерами. Вторым финишировать мог либо 2, либо 4. Если 2 пришел вторым, то он обогнал 1, и с группой лидеров $(1, 2, 3)$ больше обгонов не происходило. Значит, лыжника 4 могли только обгонять, он на финише шестой, а лыжник 6 — четвёртый.

Если же вторым пришел 4, то 2 мог придти к финишу только четвёртым (значит, 4 обогнал 2 и 1), а шестым пришел 6 (обогнав 5 и уступив 7). Итого, возможны только два протокола: $3, 2, 1, 6, 7, 4, 5$ и $3, 4, 1, 2, 7, 6, 5$.

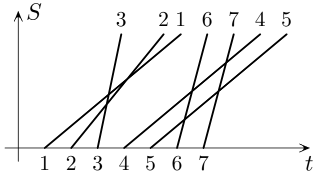

Рис. 1

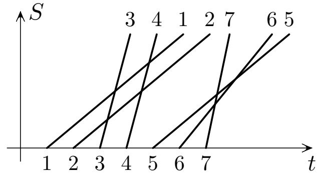

Рис. 2

Замечание. Оба этих случая возможны (но в задаче не требуется доказывать это); соответствующие графики движения приведены на рисунках 1 и 2.

Комментарий. Приведён один из двух возможных протоколов — 0 баллов. Верно предъявлены оба возможных протокола без обоснования отсутствия других — 1 балл. В доказательстве, основанном на переборе случаев, не разобран один случай, принципиально отличающийся от разобранных — ставить не более 2 баллов.

9.3. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа? *(Н. Агаханов)*

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим противное. Ясно, что $k \geqslant 10$, так как в наборе цифр от 1 до 9 нет повторяющихся. Рассмотрим

наибольшую степень десятки 10^n, не превосходящую k. Последовательность цифр числа 10^n целиком войдет в одно из составленных чисел. Но тогда такая же последовательность из единицы и n последующих нулей должна повториться во втором числе. Эта последовательность цифр не могла появиться из объединения двух или более чисел (так как натуральные числа не начинаются с нулей), значит, она содержалась в одном числе, отличном от 10^n. Но наименьшее число, отличное от 10^n и содержащее такой набор цифр, — это 10^{n+1}. Мы получили противоречие с тем, что 10^n — максимальная степень десятки, не превосходящая k.

Комментарий. Предъявлен только верный ответ (без доказательства) — 0 баллов. Присутствует идея рассматривать самую длинную последовательность нулей — 4 балла.

9.4. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1, лежит на стороне BC. *(Д. Прокопенко)*

Решение. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда $\angle B_1IC_1 = \angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)/2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 180^\circ - \angle B_1AC_1$. Значит, четырёхугольник AB_1IC_1 вписан в окружность. Отсюда $\angle AC_1B_1 = \angle AIB_1 = \angle ABI + \angle BAI = (\angle A + \angle B)/2$ (поскольку $\angle AIB_1$ — внешний в $\triangle ABI$), и аналогично $\angle AB_1C_1 = (\angle A + \angle C)/2$.

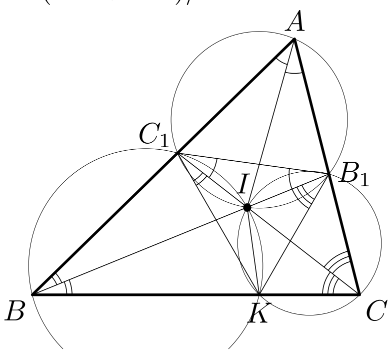

Рис. 3

Пусть описанная окружность треугольника BC_1I пересекает прямую BC в точке K (легко понять, что эта точка не может попасть на продолжение стороны BC). Тогда $\angle IKC = 180^\circ - \angle BKI = \angle BC_1I = 180^\circ - \angle AC_1I = \angle AB_1I = 180^\circ - \angle IB_1C$, то есть четырёхугольник IB_1CK также вписан.

Наконец, поскольку четырёхугольники AB_1IC_1, BC_1IK и $CKIB_1$ вписаны, мы имеем $\angle KC_1B_1 = \angle KC_1I + \angle IC_1B_1 = \angle KBI + \angle IAB_1 = (\angle B + \angle A)/2 = \angle AC_1B_1$, и аналогично $\angle KB_1C_1 = \angle KB_1I + \angle IB_1C_1 = (\angle C + \angle A)/2 = \angle AB_1C_1$. Значит, треугольники AB_1C_1 и KB_1C_1 равны по стороне B_1C_1 и двум прилежащим к ней углам. Тогда они симметричны относительно B_1C_1, а тогда и точки A и K также симметричны. Поскольку точка K лежит на BC, решение закончено.

Комментарий. Доказано, что точки A, B_1, I и C_1 лежат на одной окружности — 1 балл.