10 класс

Задача 1. «Абсолютно» упругий удар

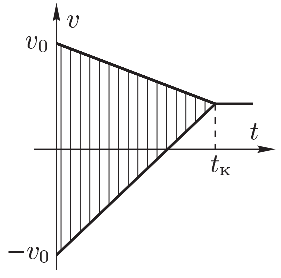

Рис. 16

Сразу после удара о стенку доска изменит направление движения на противоположенное, а кубик продолжит движение к стенке. Сила трения скольжения вызовет изменение как скорости кубика, так и скорости доски. Уравнение движения для кубика и доски:

$$v_к = -v_0 + \mu g t,$$
$$M a_д = F_{тр} = \mu m g, \qquad \text{откуда} \qquad a_д = \mu g m / M.$$

Следовательно, скорость доски $v_д = v_0 - \mu g t m/M$.

Проскальзывание прекратится после того, как скорости доски и кубика сравняются (рис. 16):

$$v_0 - \mu g \frac{m}{M} t_к = -v_0 + \mu g t_к, \qquad \text{откуда} \qquad t_к = \frac{2v_0}{\mu g} \frac{M}{(M+m)}.$$

Максимальное перемещение кубика относительно доски равно L. Из рисунка видно, что оно численно равно площади заштрихованного треугольника:

$$L = \frac{1}{2} \cdot 2v_0 \cdot t_к,$$

то есть максимальная скорость, при которой кубик не упадёт с доски:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{\mu g L}{2}} \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Примерные критерии оценивания

Найдено выражение для $v_к$ 1
Найдено выражение для $v_д$ 2
Записано условие прекращения относительного проскальзывания 1
Найдено время скольжения 1
Найдена связь L с v_0 и $t_к$ 3
Найдена скорость v_{max} 2

Задача 2. Электростатическое взаимодействие

Рассмотрим $\triangle ABC$. В нём $\angle BAC = 60°$ (рис. 17). Поскольку $AB = 2AC$, то это прямоугольный треугольник, в котором $\angle ACB = 90°$. Пусть угол между вертикалью AD и нитью AC равен α. Тогда:

$$F = mg \sin\alpha. \qquad (3)$$

Выберем в качестве полюса точку A.

Задача 5. Полость в стене

Пусть объём полости равен V_0. Тогда из уравнения состояния:

$$p(V + V_0) = C = \text{const}, \qquad \text{или} \qquad V = \frac{C}{p} - V_0,$$

так как температура воздуха по условию задачи постоянна. Если построить график в координатах (p^{-1}, V), то он должен представлять из себя прямую линию (рис. 22).

Таблица 1

p^{-1}, МПа$^{-1}$	Δp^{-1}, МПа$^{-1}$
10,0	0,3
9,1	0,3
7,7	0,2
6,7	0,2
5,7	0,2

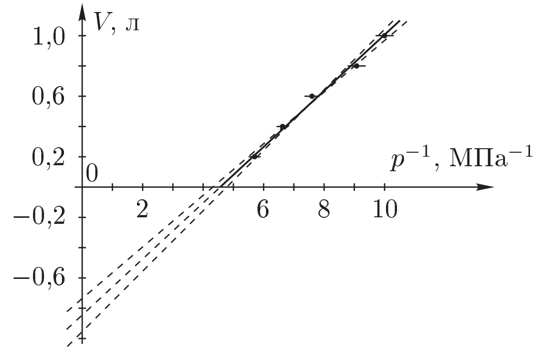

Рис. 22

Значения для построения графика приведены в таблице 1. Заметим, что удобнее строить график зависимости $V(p^{-1})$, а не $p(V^{-1})$, так как мы пытаемся определить объём. Это уменьшит погрешность его определения и облегчит обработку результатов.

Оценим погрешность p^{-1}:

$$\Delta p^{-1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \Delta p} = \frac{\Delta p}{p(p + \Delta p)} \approx \frac{\Delta p}{p^2} \approx \frac{\varepsilon_p}{p},$$

где $\varepsilon_p = 3\%$ — относительная погрешность измерения давления.

Отложим на графике экспериментальные точки. Проведём через них прямые с наименьшим и наибольшим возможным наклоном. Так мы получим значения V_{min} и V_{max}, соответствующие пересечению графика с осью V. Из этих значений оценим погрешность $\Delta V \approx (V_{max} - V_{min})/2$.

В итоге получаем ответ $V_0 = (0{,}82 \pm 0{,}05)$ л.

Примерные критерии оценивания

Записано уравнение состояния 2
Построение графика:
Если построен график $V(p)$ или $p(V)$ (нелинейный) 1
Если построен график $V(1/p)$ или $p(1/V)$ (линейный) 4
Определён V_0 2
Оценена погрешность определения V_0 2

Примерные критерии оценивания

Записано уравнение Менделеева-Клапейрона 1
Записано уравнение изображённого процесса 2
Найдена зависимость $p(T)$ 2
Найдено выражение для $p_{\max}$ 2
Записано квадратное уравнение относительно (T/T_0) 1
Решено квадратное уравнение 2

Задача 4. «Сферический» резистор

Подключим к узлам A и B батарейку. Сопротивление участка проволоки между двумя ближайшими узлами $r = R/4$. В силу симметрии цепи относительно плоскости, в которой лежит кольцо $ABCD$, точки E и F можно соединить между собой. При этом сопротивление R_{AB} не изменится. Нарисуем эквивалентную схему получившейся цепи (рис. 18).

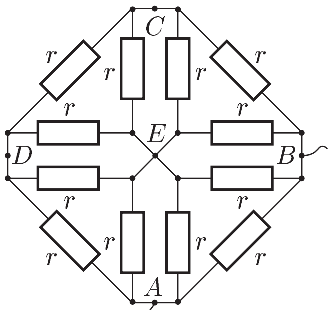

Рис. 18

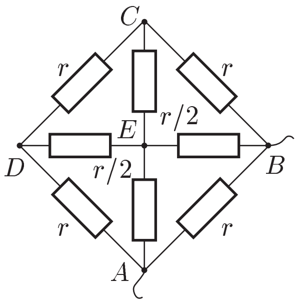

Рис. 19

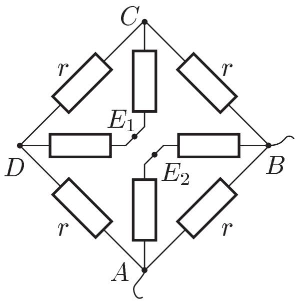

Рис. 20

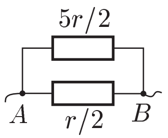

Рис. 21

Если узел E (рис. 19) разъединить так, как показано на рисунке 20, то сопротивление R_{AB} не изменится, потому что после разъединения E напряжение на участке E_1E_2 будет равно нулю в силу симметрии. Теперь легко вычислить сопротивление отдельных участков:

$$R_{CD} = r/2, \qquad R_{ADCB} = 5r/2.$$

Эквивалентная схема изображена на рисунке 21. Сопротивление получившейся цепи $R_{AB} = 5r/12 = 5R/48 = 10$ Ом.

Примерные критерии оценивания

Показано, что точки E и F можно соединить 3
Схема приведена к упрощённому виду 2
Приведена идея разъединения узла E 3
Вычислено R_{AB} 2

Согласно правилу моментов:

$$mg \cdot 2L\sin(60^\circ - \alpha) = mg \cdot L\sin\alpha.$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}$, а $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{7}} \approx 0{,}65$.

Из (3) получаем ответ:

$$F = 0{,}65mg.$$

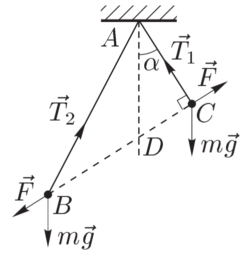

Рис. 17

Примерные критерии оценивания

Показано, что $\angle ACB$ прямой 1
Найдена связь между F, α и mg 2
Применено правило моментов относительно точки A 3
Получено выражение, из которого можно найти угол α 2
Найдена сила F 2

Задача 3. Процесс с идеальным газом

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона в виде:

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T, \tag{4}$$

где p — давление газа. Если обозначить $t = T/T_0$, а ρ_0 — максимальная плотность газа, то уравнение рассматриваемого процесса примет вид:

$$\rho = \rho_0(1 - t), \qquad \text{откуда} \qquad p = \rho_0 T_0 \frac{R}{\mu}(t - t^2). \tag{5}$$

Исследуем на максимум выражение (5). Это квадратный многочлен относительно t, представляющий из себя уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, и его значение достигает максимума в вершине параболы, то есть при $t = 1/2$. Отсюда находим максимальное давление:

$$p_{\max} = \frac{1}{4}\frac{R}{\mu}\rho_0 T_0. \tag{6}$$

С учётом (6) уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{p}{p_{\max}} = 4(t - t^2).$$

В задаче требуется найти условия, когда $p/p_{\max} = 3/4$. Решая уравнение, находим, что $T/T_0 = 1/2 \pm 1/4$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют два значения температуры:

$$T_1 = \frac{1}{4}T_0 \qquad \text{и} \qquad T_2 = \frac{3}{4}T_0.$$