11 класс

11.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{6}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$, $n = 3$ и $n = 4$, получаем, что числа $60a$, $630a$ и $24 \cdot 56a$ — целые. Значит, a — рациональное число, знаменатель q которого в несократимой записи является делителем чисел 60, 630 и $24 \cdot 56$. Следовательно, их наибольший общий делитель также делится на q. Поскольку $\text{НОД}(60, 630) = 30$, а $24 \cdot 56$ не делится на 5, то q — делитель числа 6, и $a = k/6$ при некотором целом k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чисел $n+2$, $n+3$, $n+4$ делится на 3, а одно из последовательных чисел $n+2$, $n+3$ делится на 2; значит, $n(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому $an(n+2)(n+3)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

11.6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$. (*П. Кожевников*)

Решение. Первое решение. Докажем, что точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Пусть O — центр окружности ω, а X — точка пересечения прямых BC и PL (см. рис. 3). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, достаточно доказать, что $OP \perp BC$.

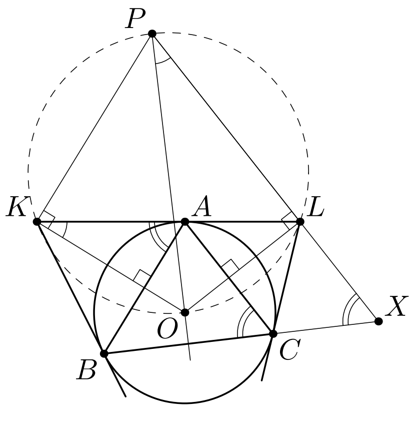

Рис. 3

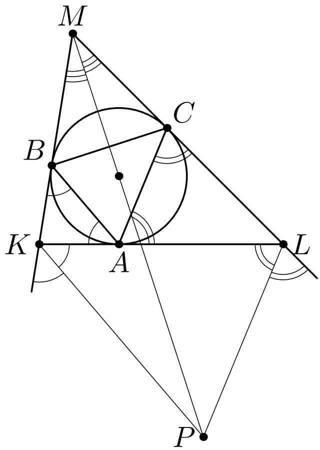

Рис. 4

Точки A и B симметричны относительно прямой OK, поэтому $OK \perp AB \parallel KP$. Аналогично $OL \perp LP$. Поскольку $\angle OKP = \angle OLP = 90^\circ$, четырехугольник $OKPL$ вписанный, откуда $\angle OPL = \angle OKL$. Из касания вытекает, что $\angle KAB = \angle ACB = \angle PXB$. Таким образом, $\angle OPX + \angle PXB = \angle OKL + \angle KAB = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть прямые BK и CL пересекаются в точке M (см. рис. 4). Поскольку треугольник ABK равнобедренный, имеем $\angle PKA = \angle BAK = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AKB)$. Значит, KP — биссектриса внешнего угла при вершине K треугольника KLM. Аналогично, LP — биссектриса внешнего угла при вершине L. Тогда P — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны KL, поэтому P лежит на биссектрисе угла M. Поскольку $MB = MC$, точки B и C симметричны относительно этой биссектрисы. Значит, и отрезки PB и PC также симметричны и потому равны.

Комментарий. Доказано, что четырехугольник $OKPL$ вписанный — 2 балла.

11.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася? (*Н. Агаханов*)

Ответ. 504.

Решение. Обозначим полученный правильный 2011-угольник через M, его вершины (по часовой стрелке) — через X_1, $X_2, \ldots, X_{2011}$, его вписанную окружность через ω, а его центр — через O. Назовём прямые, содержащие стороны многоугольника, *выделенными*.

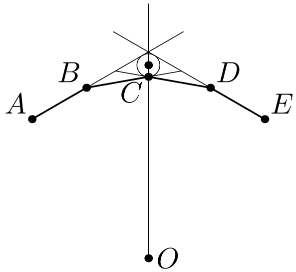

Рис. 5

Заметим, что для любых пяти последовательных вершин A, B, C, D, E многоугольника M существует окружность, отличная от ω, касающаяся прямых AB, BC, CD и DE (см. рис. 5). Действительно, вершины A и E, а также B и D симметричны относительно прямой CO. Тогда точка пересечения внешней биссектрисы угла ABC с прямой CO отлична от O и равноудалена от прямых AB, BC, CD и DE, а значит, является центром искомой окружности. Теперь, если Вася нарисует 503 такие окружности для точек $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, $(X_5, X_6, X_7, X_8, X_9)$, $\ldots$, $(X_{2009}, X_{2010}, X_{2011}, X_1, X_2)$, а также окружность ω, то любая выделенная прямая будет общей касательной к двум проведённым окружностям. Итак, 504 окружностей достаточно.

Осталось доказать, что окружностей должно быть не менее 504. Каждой выделенной прямой должны касаться хотя бы две окружности. Окружность ω касается всех 2011 этих прямых. У любой другой окружности есть не более четырёх общих касательных с ω; значит, она касается не более четырёх выделенных прямых. Итак, если окружностей n, то всего происходит не более, чем $2011 + 4(n-1)$ касаний окружности с выделенными прямыми; с другой стороны, их должно быть не меньше $2011 \cdot 2 = 4022$. Итак, $2011 + 4(n-1) \geqslant 2 \cdot 2011$, откуда $n \geqslant 2011/4 + 1 > 503$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что 504 окружностей достаточно — 2 балла.

Показано только, что 503 окружностей недостаточно — 4 балла.

11.8. Даны положительные числа b и c. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geqslant$$
$$\geqslant (b^{2011}-c^{2011})(b^{2011}+c^{2011})(c^{2011}-b^{2011}).$$

(*В. Сендеров*)

Решение. Лемма. *Для любых вещественных $x \geqslant y \geqslant 0$ и натурального n верно неравенство*

$$x^n - y^n \geqslant (x-y)^n.$$

Доказательство. Пусть $x = y + t$, $t \geqslant 0$. Раскрывая $x^n = (y+t)^n$ по биному Ньютона, имеем $x^n = y^n + \ldots + t^n \geqslant y^n + t^n$, или $x^n - y^n \geqslant t^n$. Лемма доказана. □

Без ограничения общности можно считать, что $b \geqslant c$. Обозначим $n = 2011$. Применим лемму к числам b, c, а также к числам b^2, c^2; мы получим

$$b^n - c^n \geqslant (b-c)^n,$$

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n) = (b^2)^n - (c^2)^n \geqslant (b^2 - c^2)^n = (b-c)^n(b+c)^n.$$

Перемножив полученные неравенства, получаем неравенство

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n)(b^n - c^n) \geqslant (b-c)^n(b+c)^n(b-c)^n.$$

Поскольку $b^n - c^n = -(c^n - b^n)$ и $(b-c)^n = -(c-b)^n$, полученное неравенство равносильно требуемому.