Возможные решения

9 класс

Задача 1. В прачечной

Исходный объём воды в круглом тазике равен объёму воды, вылитой в поддон. Площадь поддона, не занятая квадратным тазиком, равна $3a^2/4$, таким образом, если квадратный тазик не всплывает, то уровень H_1 воды в поддоне найдём из условия:

$$\pi R^2 h = \frac{3}{4} a^2 H_1.$$

Отсюда:

$$H_1 = \frac{4\pi R^2 h}{3a^2} \approx 5{,}2 \text{ см}.$$

Теперь выясним, всплывёт ли квадратный тазик, и если всплывёт, то на какую глубину y он погрузится в воду. По закону Архимеда:

$$mg = \rho g y \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Отсюда:

$$y = \frac{4m}{\rho a^2} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Следовательно, при выливании в поддон всей воды, содержащейся в круглом тазике, квадратный тазик всплывёт.

Сила давления на дно поддона складывается из веса тазика и веса вылитой в поддон воды $m_\text{в} g$. С другой стороны (так как на дно поддона давит только вылитая вода и никакие другие тела дна поддона не касаются), сила давления воды на дно поддона равна гидростатическому давлению слоя воды искомого уровня H_y, умноженному на площадь дна поддона.

$$mg + m_\text{в} g = \rho g a^2 H_y.$$

Масса $m_\text{в}$ вылитой в поддон воды равна объёму круглого тазика, умноженному на плотность воды, то есть $m_\text{в} = \pi R^2 h \rho$. Окончательно получим:

$$H_y = \frac{m}{\rho a^2} + \frac{\pi R^2 h}{a^2} \approx 4{,}3 \text{ см}.$$

Критерии оценивания

Найден уровень H_1 воды в поддоне (если бы квадратный таз не всплыл) . . . 3

Проверено, всплывёт ли квадратный тазик 2

Найдена глубина погружения всплывшего тазика 2

Найден уровень H_y воды в поддоне (формула) 2
Найдено численное значение H_y 1

Задача 2. Испорченный кран

Поскольку уровень воды в раковине установился, количество воды, вытекающей из крана, равно количеству воды, подтекающей из слива. По формуле Ньютона поток тепла $q = kS(t - t_0)$, где $S = 2a^2 + 4aH$ — площадь поверхности воды. Исходя из этого запишем уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{в}}\mu(t_1 - t) = q, \tag{1}$$

Из (1) находим:

$$t = \frac{\mu c_{\text{в}} t_1/(kS) + t_0}{\mu c_{\text{в}}/(kS) + 1} = 48\ ^\circ\text{C}.$$

Критерии оценивания

Записано уравнение Ньютона 3
Найдено числовое значение S 1
Записано уравнение теплового баланса 3
Получено аналитическое выражение для t 2
Найдено числовое значение t 1

Задача 3. Мелкокалиберная винтовка

Для двух пуль, вылетевших со скоростями v_1 и v_2:

$$t_1 = \frac{L}{v_1}, \qquad t_2 = \frac{L}{v_2}, \qquad h_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \qquad h_2 = \frac{gt_2^2}{2},$$

где t_1— время пролёта наиболее быстрых пуль, t_2 — наиболее медленных, а h_1 и h_2 — соответствующие смещения пуль по вертикали.

Разница высот:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{gL^2}{2}\left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) = \frac{gL^2}{2}\frac{(v_1 + v_2)(v_1 - v_2)}{v_1^2 v_2^2}. \tag{2}$$

Так как разброс скоростей пуль достаточно мал, то $v_1 + v_2 \approx 2v_0$, $v_1 - v_2 = \Delta v$, откуда:

$$\Delta h \approx \frac{gL^2}{2} \cdot \frac{2v_0 \Delta v}{v_0^4} = \frac{gL^2}{v_0^3}\Delta v. \tag{3}$$

Отсюда найдём:

$$\Delta v \approx \frac{v_0^3}{gL^2}\Delta h \approx 29\ \text{м/с}.$$

Задачу можно решить и точно, поскольку в (2) скорости $v_1 = v_0$, $v_2 = v_0 - \Delta v$. Тогда:

$$\Delta h = \frac{gL^2}{2}\left(\frac{1}{(v_0 - \Delta v)^2} - \frac{1}{v_0^2}\right). \tag{4}$$

Отсюда:

$$v_0 - \Delta v = \frac{1}{\frac{1}{v_0^2} - \frac{2\Delta h}{gL^2}},$$

или

$$\Delta v = v_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2v_0^2 \Delta h}{gL^2}}} - 1\right) = 28{,}6\ \text{м/с}. \tag{5}$$

Критерии оценивания

Найдено аналитическое выражение для h_i 2

Получено аналитическое выражение (1) 2

Сделано приближение $\Delta v = (v_1 - v_2)$ и $v_0 = (v_1 + v_2)/2$, или получена формула (3) 2

Найдено выражение (2) или (4) 2

Найдено числовое значение Δv 2

Задача 4. Очень скользкая дорога

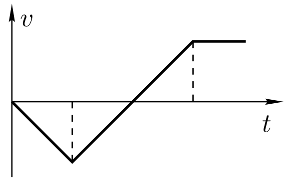

Рис. 19

Наибольшее ускорение ученика, обусловленное трением, $a = \mu g$ как при разгоне, так и при торможении (рис. 19). На скользком участке скорость не меняется. Пусть школьник в течение времени t_1 удаляется с ускорением a от края дороги. Затем он начинает тормозить с тем же ускорением. До полной остановки уйдёт такое же время t_1. При этом он окажется на расстоянии $s = at_1^2$ от края дороги. Разгоняясь в сторону границы, он затратит ещё время t_2, чтобы вновь преодолеть расстояние s. При этом $s = at_2^2/2$. Скорость же на границе $v = at_2$.

Выражая t_1 через t_2, а затем t_2 через v_0, получим ответ на первый вопрос:

$$T_1 = (\sqrt{2} + 1)\frac{v_0}{\mu g}.$$

Время пересечения дороги t_3 равно:

$$t_3 = L/(at_2).$$

Полное время движения:

$$T = 2t_1 + t_2 + t_3.$$

Выражая t_1 через t_2, получим:

$$T = (\sqrt{2} + 1)t_2 + L/(at_2).$$

Наименьшее время достигается при $(\sqrt{2}+1)t_2 = L/(at_2)$, то есть при условии:

$$t_2^2 = \frac{L}{(\sqrt{2} + 1)a}.$$

Отсюда:

$$T = 2\sqrt{\frac{L(\sqrt{2} + 1)}{\mu g}}.$$

Критерии оценивания

Получено выражение для расстояния s . . . 1
Получено выражение для времени t_2 . . . 1
Найдена связь скорости v со временем t_2 . . . 1
Получено выражение для времени T_1 . . . 2
Получено выражение для времени t_3 пересечения дороги . . . 1
Время T выражено через t_2 . . . 1
Получено окончательное выражение для времени T . . . 3

Задача 5. Амперметры и вольтметры

1. Для того, чтобы определить показания вольтметров в схеме Глюка, вместо амперметров изобразим участки проводника с нулевым сопротивлением (так как амперметры идеальные) (рис. 20). Получим следующую эквивалентную схему:

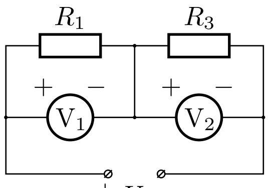

Рис. 20

Тогда показания вольтметров V_1 и V_2 будут соответственно равны:

$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 3 \text{ В}, \qquad U_2 = U_0 \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 9 \text{ В}.$$

Теперь найдём показания амперметров. Для этого вместо вольтметров сделаем разрыв цепи (так как через идеальные вольтметры ток не течёт) (рис. 21). Эквивалентная схема:

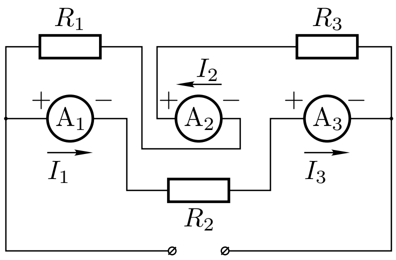

Рис. 21

Показания амперметров A_1, A_2, A_3 соответственно равны:

$$I_1 = I_3 = \frac{U_0}{R_2} = 6\text{ мА}, \qquad I_2 = -\frac{U_0}{R_1 + R_3} = -3\text{ мА}.$$

Отрицательная сила тока I_2 означает, что стрелка амперметра A_2 отклонится влево.

2. Аналогичным образом поступаем со схемой Бага. Эквивалентная схема для расчёта показаний вольтметров (рис. 22):

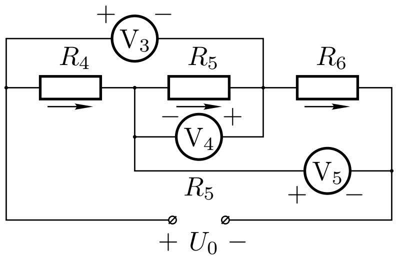

Рис. 22

Показания вольтметров равны соответственно:

$$U_3 = \frac{R_4 + R_5}{R_4 + R_5 + R_6} U_0 = 7{,}2\text{ В},$$

$$U_4 = -\frac{R_5}{R_4 + R_5 + R_6} U_0 = -4{,}0\text{ В},$$

$$U_5 = \frac{R_5 + R_6}{R_4 + R_5 + R_6} U_0 = 8{,}8\text{ В}.$$

Отрицательное напряжение U_4 означает, что стрелка вольтметра V_4 отклонится влево.

Эквивалентная схема для расчета показаний амперметров (рис. 23):

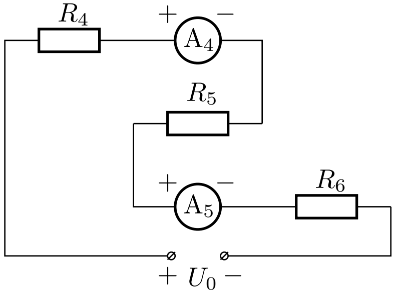

Рис. 23

Показания амперметров A_4 и A_5 равны соответственно:

$$I_4 = I_5 = \frac{U_0}{R_4 + R_5 + R_6} = 0{,}8 \text{ мА}.$$

Критерии оценивания

Найдены показания вольтметров V_1 и V_2 2
Найдены показания амперметров A_1, A_2 и A_3 3
Найдены показания вольтметров V_3, V_4 и V_5 3
Найдены показания амперметров A_4 и A_5 2