11 класс

11.5. Даны многочлен $P(x)$ и числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ такие, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что для любого действительного x выполняется равенство

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3).$$

Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

(А. Голованов, О. Дмитриев, К. Сухов)

Первое решение. Предположим, что $P(x)$ не имеет действительных корней. Тогда $P(x)$ имеет четную степень, не меньшую 2. Действительно, любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень, а если $P(x) = \text{const}$, то из условия получаем, что $P(x) \equiv 0$.

Так как $P(x)$ не имеет действительных корней, то он принимает значения одного знака. Будем считать, что $P(x)$ принимает только положительные значения (иначе умножим $P(x)$ на -1), то есть для любого x выполняется $P(x) > 0$. Так как $P(x)$ имеет четную степень, найдется точка t_0, в которой достигается (глобальный нестрогий) минимум $P(x)$, то есть для любого x выполняется неравенство $P(x) \geqslant P(t_0) = A > 0$. Рассмотрим x_0 такое, что $t_0 = a_3x_0 + b_3$. Но тогда $P(a_1x_0 + b_1) + P(a_2x_0 + b_2) \geqslant 2A > A = P(t_0) = P(a_3x_0 + b_3)$. Получили противоречие. Значит, $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

Второе решение. Пусть $a_1 \neq a_3$; тогда существует такое x_0, что $a_1x_0 + b_1 = a_3x_0 + b_3$. Подставляя $x = x_0$ в данное равенство, получаем после сокращения $P(a_2x_0 + b_2) = 0$, то есть у $P(x)$ есть корень. Аналогично рассматривается случай $a_2 \neq a_3$.

Остался лишь случай $a_1 = a_2 = a_3 = a \neq 0$. Если $P(x) \equiv 0$, утверждение задачи очевидно. Иначе пусть $p_0 \neq 0$ — старший коэффициент многочлена $P(x)$, а n — его степень. Тогда старшие коэффициенты многочленов в левой и правой частях данного равенства есть $p_0(a^n + a^n)$ и p_0a^n, т.е. они различны. Это невозможно.

11.6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC. (*А. Полянский*)

Решение. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а через A_0, B_0, C_0 — точки её касания со сторонами BC, CA, AB, соответственно. Будем считать, что точка A_1 лежит на отрезке A_0B. Заметим, что $CA_0 + AC_0 = CB_0 + AB_0 = CA$. Из условия следует, что $CA_1 + AC_1 = CB_1 + AB_1 = CA$. Значит, $CA_0 - CA_1 = AC_1 - AC_0$; это значит, что $A_1A_0 = C_1C_0$, и точка C_1 лежит на отрезке C_0A. Значит, прямоугольные тре-

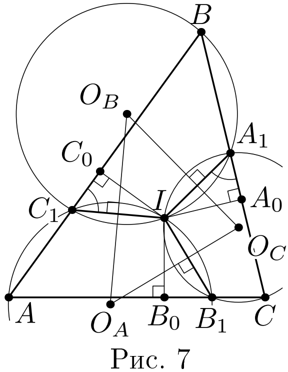

Рис. 7

угольники IA_0A_1 и IC_0C_1 равны по двум катетам, поэтому $\angle IA_1C = \angle IC_1B$ и $IA_1 = IC_1$. Это значит, что четырёхугольник BC_1IA_1 вписан. Аналогично, четырёхугольники AB_1IC_1 и CA_1IB_1 также вписаны, и $IA_1 = IB_1 = IC_1$.

Линии центров O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B являются серединными перпендикулярами к общим хордам IA_1, IB_1, IC_1 соответственно; длины этих хорд равны. Значит, расстояния от I до сторон треугольника $O_AO_BO_C$ равны $\frac{IA_1}{2} = \frac{IB_1}{2} = \frac{IC_1}{2}$. Наконец, поскольку углы $\angle IBA_1$, $\angle IAC_1$, $\angle ICB_1$ острые, то отрезки O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B пересекают лучи IA_1, IB_1, IC_1, соответственно. Значит, I лежит внутри треугольника $O_AO_BO_C$; значит, это и есть центр вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$.

11.7. На окружности отмечено $2n+1$ точек, делящих её на равные дуги ($n \geqslant 2$). Двое по очереди стирают по одной точке. Если после хода игрока оказалось, что все треугольники с вершинами в ещё отмеченных точках — тупоугольные, он немедленно выигрывает, и игра заканчивается. Кто выиграет при правильной игре: начинающий игру или его противник? (*Ф. Ивлев*)

Ответ. Противник.

Решение. Приведём стратегию для второго игрока, позволяющую ему выиграть. Для этого он будет добиваться выполнения следующего условия: перед каждым ходом первого, если осталось $2k+1 \geqslant 5$ точек, то на любой полуокружности осталось не менее k отмеченных точек.

Покажем индукцией по числу ходов, что это возможно. В начале игры это условие выполнено. Пусть перед ходом первого оно выполнено; пронумеруем оставшиеся точки по порядку $A_0, \ldots, A_{2k}$. Пусть для определённости первый своим ходом удаляет точку A_0; заметим, что треугольник $A_{k+1}A_1A_{k+2}$ остроугольный, так что игра ещё не закончилась. Второму достаточно удалить точку A_k. Теперь, если с некоторой полуокружности удалено не более одной точки, то на ней осталось не менее $k-1$ точки; иначе с неё стёрты обе точки A_0 и A_k, поэтому на ней остались либо точки $A_1, \ldots, A_{k-1}$, либо точки $A_{k+1}, \ldots, A_{2k}$; в любом случае для неё требуемое условие выполнено.

Итак, если первый не проиграет раньше, то после $2n-4$ ходов на доске останется пять точек A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Пусть для определённости первый удалит точку A_0; тогда ещё останется остроугольный треугольник $A_1A_2A_4$. Второй же последним ходом удалит A_4, и оставшийся треугольник $A_1A_2A_3$ будет тупоугольным (иначе нашлась бы полуокружность, содержащая лишь A_2). Значит, второй выиграет.

Замечание 1. Естественно, вместо точки A_k второй может выбирать также точку A_{k+1}. Нетрудно видеть, что при описанной стратегии в конце игры останутся именно три отмеченных точки.

Замечание 2. По сути ту же стратегию можно оформить по-другому. Соединим каждую из исходных точек с двумя наиболее удалёнными от неё. Все проведённые отрезки образуют одну $(2n+1)$-звенную ломаную. Тогда второй может ходить так, чтобы после каждого его хода (кроме последнего) все **стёртые** точки разбивались на пары точек, соединённых отрезком. Можно показать, что соблюдения этого условия также достаточно для выигрыша.

11.8. Для натурального n обозначим $S_n = 1!+2!+\ldots+n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель, больший 10^{2012}. (*Ф. Петров*)

Решение. Для простого p и натурального n обозначим через $\nu_p(n)$ степень, в которой p входит в разложение n на простые множители. Заметим, что если $\nu_p(n) \neq \nu_p(k)$, то $\nu_p(n \pm k) = \min(\nu_p(n), \nu_p(k))$.

Предположим противное; обозначим $P = 10^{2012}$. Тогда все простые делители чисел вида S_n не превосходят P.

Лемма. *Пусть $\nu_p(S_n) < \nu_p((n+1)!)$ при некотором n. Тогда $\nu_p(S_k) = \nu_p(S_n)$ при всех $k \geqslant n$.*

Доказательство. Обозначим $a = \nu_p(S_n)$, $b = \nu_p((n+1)!)$; тогда $b \geqslant a+1$. Заметим, что $S_k = S_n + (n+1)! + \ldots + k!$; в этой сумме все слагаемые, кроме первого, делятся на p^{a+1}, а первое делится лишь на p^a, но не на p^{a+1}. Значит, и S_k делится на p^a, но не на p^{a+1}. □

Рассмотрим некоторое простое $p \leqslant P$. Ввиду леммы, если

$\nu_p(S_n) < \nu_p((n+1)!)$ при некотором n, то существует число a_p такое, что $\nu_p(S_n) \leqslant a_p$ при всех натуральных n. Назовём такое простое число p *маленьким*; все остальные простые числа, меньшие P, назовём *большими*. Так как маленьких простых конечное количество, существует натуральное M, большее любого числа вида p^{a_p}, где p — маленькое.

Пусть теперь p — большое простое число, а n — такое число, что $n+2 \,\vdots\, p$. Тогда из леммы имеем $\nu_p(S_{n+1}) \geqslant \nu_p((n+2)!) > > \nu_p((n+1)!)$; значит, $\nu_p(S_n) = \nu_p(S_{n+1} - (n+1)!) = = \nu_p((n+1)!) = \nu_p(n!)$ (последний переход верен, ибо $n+1$ не кратно p).

Рассмотрим теперь число $N = MP! - 2$. По доказанному, $\nu_p(S_N) = \nu_p(N!)$ для любого большого простого p. Кроме того, поскольку $N \geqslant M$, то $\nu_p(S_N) \leqslant \nu_p(p^{a_p}) \leqslant \nu_p(N!)$ для любого маленького простого p. Поскольку все простые делители числа S_N — либо большие, либо маленькие, отсюда следует, что $S_N \leqslant \leqslant N!$, что, очевидно, неверно. Противоречие.

Замечание. После доказательства леммы можно завершить решение и по-другому. Например, можно показать, что $\nu_p(S_{n-1}) = \nu_p(n!)$ для любого n, кратного большому простому p. Предположим противное, тогда $\nu_p(S_{n-1}) > \nu_p(n!)$. Рассмотрим число

$$S_{n+p-1} = S_{n-1} + n! \cdot (1 + (n+1) + (n+1)(n+2) + \\ + \ldots + (n+1)\ldots(n+p-1)).$$

Обозначим через A_n выражение в скобках в правой части; тогда $A_n \equiv 1 + 1! + 2! + \ldots + (p-1)! = 1 + S_{p-1} \pmod p$. Поскольку $S_{p-1} \,\vdots\, p$ по лемме, получаем, что A_n не делится на p и потому $\nu_p(S_{n+p-1}) = \min(\nu_p(S_{n-1}), \nu_p(n!)) = \nu_p(n!) < \nu_p((n+p)!)$. Это противоречит лемме.

Отсюда, полагая $N = kP! - 1$ при некотором натуральном $k \geqslant M$, получаем $\nu_p(S_N) \leqslant \nu_p((N+1)!)$ для любого $p \leqslant P$. В то же время, у числа $(N+1)!$ есть простые делители, бóльшие P, и нетрудно показать, что при достаточно большом k их вклад больше, чем $N+1$; значит, $S_k \leqslant (N+1)!/(N+1) = N!$, что неверно.