Условия и решения задач

9 класс

9.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{11}$ — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равна 2012? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что такое число n существует.

Заметим, что максимальный возможный остаток от деления на натуральное число m равен $m-1$. Поэтому сумма остатков от деления произвольного числа на числа $a_1, \ldots, a_{11}$ не больше, чем $407 - 11 = 396$, а сумма остатков от деления его на числа $4a_1, \ldots, 4a_{11}$ не больше, чем $4 \cdot 407 - 11 = 1617$. Итак, если бы все остатки были максимальными возможными, то их сумма равнялась бы $396 + 1617 = 2013$. Поскольку эта сумма для нашего числа n равна 2012, то все остатки, кроме одного, — максимальные возможные, а один — на единицу меньше максимального возможного.

Значит, при некотором k один из остатков от деления n на числа a_k и $4a_k$ — максимальный возможный, а другой — на единицу меньше максимального возможного. Тогда одно из чисел $n+1$ и $n+2$ делится на a_k, а другое — на $4a_k$, то есть два взаимно простых числа $n+1$ и $n+2$ делятся на $a_k \geqslant 2$. Это невозможно.

9.2. На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон? (*Д. Храмцов*)

Ответ. При $k = 1509$.

Решение. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{2012}$ — отмеченные точки в порядке обхода (мы будем считать, что $A_{2013} = A_1$, $A_{2014} = A_2$). Разобьём их на четвёрки точек $(A_1, A_2, A_{1007}, A_{1008})$, $(A_3, A_4, A_{1009}, A_{1010})$, $\ldots$, $(A_{1005}, A_{1006}, A_{2011}, A_{2012})$. Если среди выбранных k точек встретятся все точки некоторой четвёрки $(A_{2i-1}, A_{2i}, A_{2i+1005}, A_{2i+1006})$, то в полученном многоугольнике найдутся две стороны $A_{2i-1}A_{2i}$ и $A_{2i+1005}A_{2i+1006}$, которые симметричны относительно центра окружности и потому параллельны. Это невозможно; значит, в каждой из 503 четвёрок будет отмечено не более трёх вершин, то есть $k \leqslant 503 \cdot 3 = 1509$.

Осталось привести пример 1509-угольника без параллельных сторон с вершинами в отмеченных точках. Подходит, например, многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{1006}A_{1008}A_{1010} \ldots A_{2012}$ (его вершинами являются все точки с номерами от 1 до 1006 и все точки с чётными номерами от 2008 до 2012). Действительно, стороны $A_{2012}A_1$, A_1A_2, $\ldots$, $A_{1005}A_{1006}$ лежат по одну сторону от диаметра $A_{2012}A_{1006}$ и потому не могут быть параллельными; аналогично, стороны $A_{1006}A_{1008}, \ldots, A_{2010}A_{2012}$ попарно непараллельны. Наконец, маленькая диагональ A_jA_{j+2} правильного 2012-угольника не параллельна его сторонам; значит, никакие две стороны вида A_iA_{i+1} и A_jA_{j+2} также не могут быть параллельными.

9.3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

(*Ф. Ивлев*)

Решение. Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AD. Тогда четырёхугольник $AHBE$ — прямоугольник. Значит, $\angle HED = \angle ABC = 180^\circ - \angle BCD$, то есть точки D, C, H, E лежат на некоторой окружности ω (см. рис. 1).

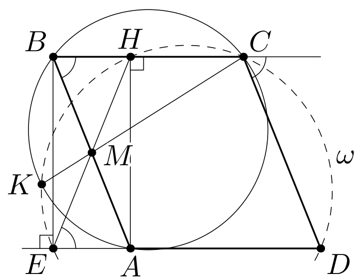

Рис. 1

Пусть M — точка пересечения диагоналей прямоугольника $AHBE$, то есть $MA = MB = MH = ME$ (по условию, точка M лежит на CK). Поскольку точки A, K, B, C лежат на одной окружности, имеем $MK \cdot MC = MA \cdot MB = MH \cdot ME$. Это равенство означает, что точки C, K, H и E лежат на одной окружности. Эта окружность является описанной окружностью треугольника CHE, то есть совпадает с ω; итого, все четыре точки K, H, C, D лежат на ω.

9.4. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1 + \ldots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше, чем на 1. (*Н. Агаханов*)

Решение. Перемножив равенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 3k \tag{1}$$

и неравенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k,$$

получим неравенство

$$a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + a_1^3a_2 + a_1a_2^3 + a_1^3a_3 + a_1a_3^3 + \ldots + a_{n-1}^3a_n + a_{n-1}a_n^3 >$$
$$> 9k^4 + 3k^2. \tag{2}$$

Возведем теперь в квадрат равенство

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2. \tag{3}$$

Получим

$$a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 2a_1^2a_2^2 + 2a_1^2a_3^2 + \ldots + 2a_{n-1}^2a_n^2 = 9k^4. \tag{4}$$

Вычитая из неравенства (2) равенство (4), получаем

$$(a_1^3a_2 - 2a_1^2a_2^2 + a_1a_2^3) + \ldots + (a_{n-1}^3a_n - 2a_{n-1}^2a_n^2 + a_{n-1}a_n^3) > 3k^2,$$

или

$$a_1a_2(a_1 - a_2)^2 + a_1a_3(a_1 - a_3)^2 + \ldots + a_{n-1}a_n(a_{n-1} - a_n)^2 > 3k^2. \tag{5}$$

Предположим теперь, что любые два числа отличаются не больше, чем на 1. Тогда квадрат их разности не больше 1, и из (5) получаем неравенство

$$a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n > 3k^2. \tag{6}$$

Но, если вычесть из квадрата равенства (1) равенство (3), получится равенство

$$2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n = 6k^2,$$

что противоречит (6). Значит, найдутся два числа, отличающиеся больше, чем на 1.