Условия и решения задач

9 класс

9.5. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться. (*И. Богданов*)

Решение. Сопоставим каждому мудрецу с некоторым мнением знак «$+$», а с противоположным — знак «$-$». Тогда расстановке мудрецов соответствует расстановка 101 знака по кругу.

Пусть в некоторый момент два одинаковых знака стоят подряд. Тогда в следующую минуту они не изменятся, и поэтому останутся одинаковыми. Значит, ни в один из последующих моментов они также не изменятся.

Назовём теперь знак *стабильным*, если рядом с ним стоит хотя бы один такой же. Поскольку количество знаков нечётно, стабильный знак найдётся. Кроме того, любой стабильный знак уже не изменяется и остаётся стабильным, а любой нестабильный знак в очередную минуту меняется на противоположный. Предположим, что в некоторый момент какой-то знак изменился. Тогда не все знаки были стабильными, и найдётся стабильный знак a, соседний с нестабильным знаком b. Это значит, что в следующую минуту a не изменится, а b изменится, то есть станет таким же, как a и, следовательно, стабильным.

Итак, пока знаки меняются, количество стабильных знаков строго увеличивается. Значит, рано или поздно оно станет равным 101, и перемены знака закончатся.

Замечание. Можно показать, что знаки могут изменяться в течение лишь первых 50 минут.

9.6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 =$

$= CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C — центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC. (*А. Полянский*)

Решение. Обозначим через I центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а через A_0, B_0, C_0 — точки её касания со сторонами BC, CA, AB, соответственно. Будем считать, что точка A_1 лежит на отрезке A_0B (см. рис. 1). Заметим, что $CA_0 + AC_0 = CB_0 + AB_0 = CA$. Из условия следует, что $CA_1 + AC_1 = CB_1 + AB_1 = CA$. Отсюда $CA_0 - CA_1 = AC_1 - AC_0$; это значит, что $A_1A_0 = C_1C_0$, и точка C_1 лежит на отрезке C_0A. Тогда прямоугольные треугольники IA_0A_1 и IC_0C_1 равны по двум катетам, поэтому $\angle IA_1C = \angle IC_1B$. Это значит, что четырёхугольник BC_1IA_1 вписан. Аналогично, четырёхугольники AB_1IC_1 и CA_1IB_1 также вписаны.

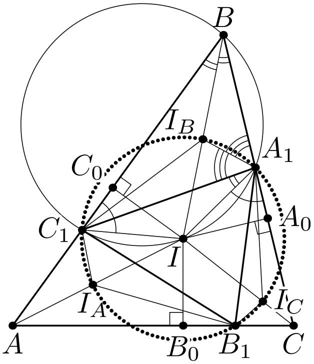

Рис. 1

Точки B, I_B и I лежат на одной прямой (биссектрисе угла A_1BC_1), поэтому $\angle A_1I_BI = \angle BA_1I_B + \angle A_1BI_B = \angle I_BA_1C_1 + \angle C_1BI = \angle I_BA_1C_1 + \angle C_1A_1I = \angle I_BA_1I$. Значит, треугольник II_BA_1 равнобедренный, то есть $II_B = IA_1$. Аналогичным образом получаем, что $II_B = IC_1 = II_A = IB_1 = II_C = IA_1$. Следовательно, I — центр окружности, описанной около $I_AI_BI_C$.

9.7. Изначально на доске записаны 10 последовательных натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа на доске (обозначим их a и b) и заменить их на числа $a^2 - 2011b^2$ и ab. После нескольких таких операций на доске не осталось ни одного из исходных чисел. Могли ли там опять оказаться 10 последовательных натуральных чисел? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не могли.

Решение. Предположим, что после нескольких операций снова получились десять последовательных натуральных чисел, причём каждое из исходных чисел участвовало хотя бы в одной операции.

Лемма. *Для любого натурального k, при проведении операции количество чисел на доске, делящихся на k, не уменьшается.*

Доказательство. Если в операции участвовали числа a и b, одно из которых делится на k, то и их произведение также делится на k. Более того, если оба исходных числа делятся на k, то и число $a^2 - 2011b^2$ делится на k. Отсюда и следует утверждение леммы. $\square$

Заметим, что в начальной и конечной ситуациях есть по пять чисел, делящихся на 2, и по одному числу, делящемуся на 10. Значит, ввиду леммы, количество чисел, делящихся на 2, в процессе должно не изменяться, и то же верно для чисел, делящихся на 10.

Среди исходных 10 чисел было число a, оканчивающееся на 5. Рассмотрим теперь первую операцию, в которой оно участвовало; пусть b — второе число, участвовавшее в этой операции. Если b нечётно, то одно из полученных чисел будет чётным, и количество чётных чисел увеличится, что невозможно. Значит, b чётно, и на доске появится число ab, делящееся на 10. Если при этом b не делится на 10, то количество чисел, кратных 10, увеличилось, что невозможно.

Итак, b делится на 10, и в нашей операции участвовали два числа, делящихся на 5. Тогда в её результате на доске получились два числа, кратных 25. По лемме, и в конечной ситуации найдутся два таких числа; но это невозможно для 10 последовательных натуральных чисел. Противоречие.

9.8. В некотором городе сеть автобусных маршрутов устроена так, что любые два маршрута имеют ровно одну общую остановку, и на каждом маршруте есть хотя бы 4 остановки. Докажите, что все остановки можно распределить между двумя компаниями так, что на каждом маршруте найдутся остановки обеих компаний. (*В. Дольников*)

Решение. Рассмотрим произвольные два маршрута ℓ_1 и ℓ_2; пусть A — их общая остановка. Если остановка A находится на всех маршрутах, то можно отдать её одной компании, а все остальные остановки — другой; ясно, что при этом на каждом маршруте будут остановки обеих компаний.

Пусть теперь найдётся маршрут ℓ_3, не проходящий через остановку A. Пусть B и C — его общие остановки с ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Ясно, что B и C отличны от A; заметим, что $B \neq C$, поскольку иначе у ℓ_1 и ℓ_2 найдутся две общих остановки.

Распределим теперь остановки по компаниям так: остановки A, B и C отдадим первой компании, все остальные остановки маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — второй компании, а все остановки, не лежащие ни на одном из маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — снова первой (см. рис. 2). Покажем, что это распределение — требуемое. Ясно, что каждый из маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 проходит через остановки обеих компаний.

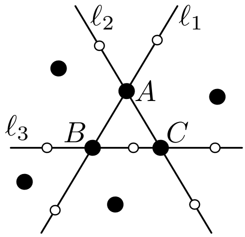

Рис. 2

Рассмотрим любой из оставшихся маршрутов ℓ. С каждым из маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 у него лишь одна общая остановка. Значит, на ℓ есть не более трёх остановок второй компании; поэтому там есть остановка первой. Далее, ℓ не может проходить через две из остановок A, B, C, иначе он будет иметь две общих остановки с одним из маршрутов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Пусть для определённости ℓ не проходит через B и C. Тогда ℓ пересекается с ℓ_3 по некоторой остановке X, отличной от B и C, то есть принадлежащей второй компании. Утверждение доказано.