

10 класс

Первый день

- 10.1. Пусть a_1, \dots, a_{10} — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ равна 2012?
- 10.2. Окружность ω , вписанная в остроугольный неравносторонний треугольник ABC , касается стороны BC в точке D . Пусть точка I — центр окружности ω , а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AID , пересекает вторично прямую AO в точке E . Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω .
- 10.3. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2$. Докажите, что $k^2 \geq 25/3$.
- 10.4. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов $1, x, x^2, \dots, x^n$. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1 + x, S_2 = 1 + x + x^2, S_3 = 1 + x + x^2 + x^3, \dots, S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Докажите, что $m \geq 2n/(k+1)$.

10 класс

Первый день

- 10.1. Пусть a_1, \dots, a_{10} — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ равна 2012?
- 10.2. Окружность ω , вписанная в остроугольный неравносторонний треугольник ABC , касается стороны BC в точке D . Пусть точка I — центр окружности ω , а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AID , пересекает вторично прямую AO в точке E . Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω .
- 10.3. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2$. Докажите, что $k^2 \geq 25/3$.
- 10.4. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов $1, x, x^2, \dots, x^n$. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1 + x, S_2 = 1 + x + x^2, S_3 = 1 + x + x^2 + x^3, \dots, S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Докажите, что $m \geq 2n/(k+1)$.