11 класс

Первый день

11.1. Изначально на столе лежат 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы?

11.2. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$.

11.3. Клетчатая плоскость раскрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Затем белые клетки снова раскрашены в красный и синий цвета так, чтобы клетки, соседние по углу, были разноцветными. Пусть ℓ — прямая, не параллельная сторонам клеток. Для каждого отрезка I, параллельного ℓ, посчитаем разность сумм длин его красных и синих участков. Докажите, что существует число C (зависящее только от прямой ℓ) такое, что все полученные разности не превосходят C.

11.4. Дана пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Изначально на столе лежат 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы?

11.2. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$.

11.3. Клетчатая плоскость раскрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Затем белые клетки снова раскрашены в красный и синий цвета так, чтобы клетки, соседние по углу, были разноцветными. Пусть ℓ — прямая, не параллельная сторонам клеток. Для каждого отрезка I, параллельного ℓ, посчитаем разность сумм длин его красных и синих участков. Докажите, что существует число C (зависящее только от прямой ℓ) такое, что все полученные разности не превосходят C.

11.4. Дана пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.