11 класс

Второй день

11.5. Даны многочлен $P(x)$ и числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ такие, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что для любого действительного x выполняется равенство

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3).$$

Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

11.6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.7. На окружности отмечено $2n + 1$ точек, делящих её на равные дуги ($n \geqslant 2$). Двое по очереди стирают по одной точке. Если после хода игрока оказалось, что все треугольники с вершинами в ещё отмеченных точках — тупоугольные, он немедленно выигрывает, и игра заканчивается. Кто выиграет при правильной игре: начинающий игру или его противник?

11.8. Для натурального n обозначим $S_n = 1! + 2! + \ldots + n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель, больший 10^{2012}.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Даны многочлен $P(x)$ и числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ такие, что $a_1a_2a_3 \neq 0$. Оказалось, что для любого действительного x выполняется равенство

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3).$$

Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

11.6. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.7. На окружности отмечено $2n + 1$ точек, делящих её на равные дуги ($n \geqslant 2$). Двое по очереди стирают по одной точке. Если после хода игрока оказалось, что все треугольники с вершинами в ещё отмеченных точках — тупоугольные, он немедленно выигрывает, и игра заканчивается. Кто выиграет при правильной игре: начинающий игру или его противник?

11.8. Для натурального n обозначим $S_n = 1! + 2! + \ldots + n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель, больший 10^{2012}.