Возможные решения
9 класс

Задача 1. Поплавок в ракете

Сила Архимеда зависит от ускорения системы. Действительно, если мысленно заменить водой погруженную в воду часть тела и записать для неё второй закон Ньютона, то получится $V_{\text{погр}}\rho_0\,a = F_A - V_{\text{погр}}\rho_0 g$, где F_A — сила, действующая со стороны окружающей жидкости на погружённый объём, откуда

$$F_A = V_{\text{погр}}\rho_0(g+a).$$

1. Условие равновесия поплавка в неподвижной ракете

$$0 = (V - zS)\rho_0 g - V\rho g - kx_0, \tag{1}$$

где V — объём поплавка, z — высота выступающей над поверхностью воды части.

Предположим, что при ускоренном движении глубина погружения поплавка не изменилась, тогда второй закон Ньютона для поплавка примет вид:

$$V\rho a = (V - zS)\rho_0(g+a) - V\rho g - kx_0. \tag{2}$$

Сравнивая (2) с (1), видим, что последнее равенство возможно лишь при отсутствии ускорения или при увеличении x_0. Значит, предположение неверно, поплавок всплывёт.

2. Пусть искомое изменение глубины равно x. Запишем второй закон Ньютона для поплавка в проекции на вертикальную ось при ускоренном движении:

$$V\rho a = (V - zS - xS)\rho_0(g+a) - V\rho g - k(x_0 + x). \tag{3}$$

Подставив выражение для $(V - zS)$ из уравнения (1) в уравнение (3), получим

$$kx_0 a = kxg + \rho_0(g+a)xSg.$$

Окончательно,

$$x = x_0\frac{ka}{(k + \rho_0 S(g+a))g}.$$

3. При ускорении $a = 3g$ найдём

$$x = 2{,}14\ \text{см}.$$

Задача 2. Пружина и шарик

На первом участке падения (до касания пружины $L_0 < h < H$) кинетическая энергия шарика равна уменьшению его потенциальной энергии:

$$E_{\text{к}} = mg(H - h).$$

Таким образом, по наклону начального линейного участка графика находим:

$$mg = \frac{\Delta E_к}{\Delta h} = 5 \text{ Н}, \qquad \text{откуда} \qquad m = 0{,}5 \text{ кг}.$$

Длину пружины L_0 определим по значению h, при котором нарушается линейный характер зависимости $E_к(h)$.

$$L_0 = 1{,}5 \text{ м}.$$

После контакта шарика с пружиной уменьшение его потенциальной энергии равно сумме кинетической энергии шарика и потенциальной энергии деформированной пружины:

$$mg(H - h) = \frac{k(L_0 - h)^2}{2} + E_k. \tag{4}$$

Мы получили квадратное уравнение относительно h. Максимум квадратичной функции вида $\big(y = ax^2 + bx + c\big)$ достигается при $x_m = -b/(2a)$.

Следовательно, в уравнении (4) значение h_m, при котором кинетическая энергия шарика максимальна, определяется выражением:

$$h_m = L_0 - \frac{mg}{k}. \tag{5}$$

Из графика видно, что максимум кинетической энергии достигается при

$$h_m = 1{,}375 \text{ м}. \tag{6}$$

Приравнивая (5) и (6), находим $k = 40$ Н/м.

Задача 3. Предварительный подогрев

Заметим, что мощность тепловых потерь стакана $N_1 = \alpha S(t_i - t_1)$, где S — площадь внешней поверхности стакана, t_i — температура жидкости в стакане, α — коэффициент пропорциональности.

Запишем уравнение теплового баланса для первого стакана:

$$Q_1 = m_1 C\Delta t_1 = (N_0 - N_1)\tau_1 \approx N_0\tau_1, \tag{7}$$

где N_0 — мощность нагревателя, C — удельная теплоёмкость жидкости в стакане, $m_1 = \rho V_1$ — масса жидкости, находящейся в первом стакане. Тепловыми потерями пренебрегаем из-за малой разности температур.

Когда процесс теплообмена установится, то:

$$N_0 = N_1, \qquad \text{или} \qquad N_0 = \alpha S_1(t_2 - t_1). \tag{8}$$

Аналогичным образом для второго случая запишем:

$$Q_2 = m_2 C\Delta t_2 \approx (N_0 - \alpha S_2(t_3 - t_1))\tau_2, \tag{9}$$

$$N_0 = \alpha S_2(t_4 - t_1). \tag{10}$$

Из свойств подобия следует, что $S \sim l^2$, $V \sim l^3$, откуда $S_2 = 4S_1$, $m_2 = 8m_1$. Из (8) и (10) получим:

$$S_1(t_2 - t_1) = 4S_1(t_4 - t_1), \qquad \text{или} \qquad t_4 = 25^\circ\text{C}.$$

Из (8) следует:

$$\alpha S_1 = \frac{N_0}{t_2 - t_1}. \tag{11}$$

Искомое время τ_2 найдём из (9) с учётом (7):

$$\tau_2 \approx \frac{8m_1 C\Delta t_2}{N_0 - 4\alpha S_1(t_3 - t_1)}; \tag{12}$$

$$\tau_1 \approx \frac{m_1 C\Delta t_1}{N_0}. \tag{13}$$

Поделив почленно (12) на (13), с учётом (11), получим:

$$\tau_2 \approx \tau_1 \left[\frac{8\Delta t_2}{\Delta t_1} \frac{t_2 - t_1}{(t_2 - t_1) - 4(t_3 - t_1)}\right] \approx 20 \text{ с}.$$

Задача 4. Диод

Пусть I – сила тока, текущего через диод.

1. Предположим, что диод заперт ($I = 0$). Тогда сила тока, текущего через резистор R_2 равна $I_C = 1$ мА, а через резистор R_1, соответственно $I_B = 3$ мА. В этом случае напряжение U на диоде равно $I_B R_1 - I_C R_2 = 13$ В.

При такой полярности диод заперт и ток через него не течет, как мы и предполагали.

2. Полярность подключения диода изменили (рис. 20), поэтому он не может быть заперт. Через диод течёт ток I и напряжение на нем равно $U_0 = 2$ В.

Для силы токов каждой из ветвей выполняются соотношения:

$$I_B = I_{AB} + I, \qquad I_{AC} = I + I_C, \tag{14}$$

для напряжений:

$$R_1 I_{AB} = R_2 I_{AC} + U_0. \qquad (15)$$

Отсюда,

$$R_1(I_B - I) = R_2(I_C + I) + U_0,$$

$$I = \frac{R_1 I_B - R_2 I_C - U_0}{R_1 + R_2} = 1 \text{ мА}.$$

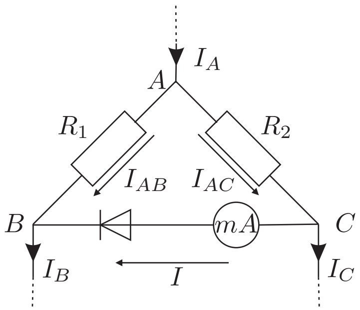

Рис. 20

Задача 5. Потерянное зеркало

Зеркала, по условию, образуют двугранный угол. Область, из которой видны оба изображения источника, содержит точку O каждого зеркала. Значит, зеркала пересекаются в точке O. Область, из которой видно изображение источника S в зеркале M_1, ограничивается лучом OB (если бы она ограничивалась лучом OA, в области AOB не было бы видно изображения в этом зеркале). Значит, изображение источника в зеркале M_1 находится на продолжении прямой BO за точку O (рис. 21). Аналогично, изображение источника в зеркале M_2 находится на продолжении прямой AO за точку O.

Геометрическое место точек, где мог бы находитья источник — это луч OC, получающийся отражением луча OB_1 в зеркале M_1 ($\angle B_1OM_1 = \angle COM_1$).

Поскольку источник S, лежащий на луче OC, при отражении в зеркале M_2 должен попасть на луч OA_1, то зеркало OM_2 лежит на биссектрисе угла $\angle COA_1$.

На рисунке для некоторого положения источника S показаны положения его изображений в зеркалах M_1 и M_2.

Луч OA_1 — это изображение луча OC в зеркале M_2. При повороте зеркала M_2 на угол φ, изображение луча OC повернётся на угол 2φ. При этом плоскость зеркала M_2 перейдёт в плоскость зеркала M_1, а луч OA_1 перейдёт в луч OB_1. Значит,

$$\angle A_1OB_1 = 2\varphi = \angle AOB = 30^\circ, \qquad \text{откуда} \qquad \varphi = 15^\circ.$$

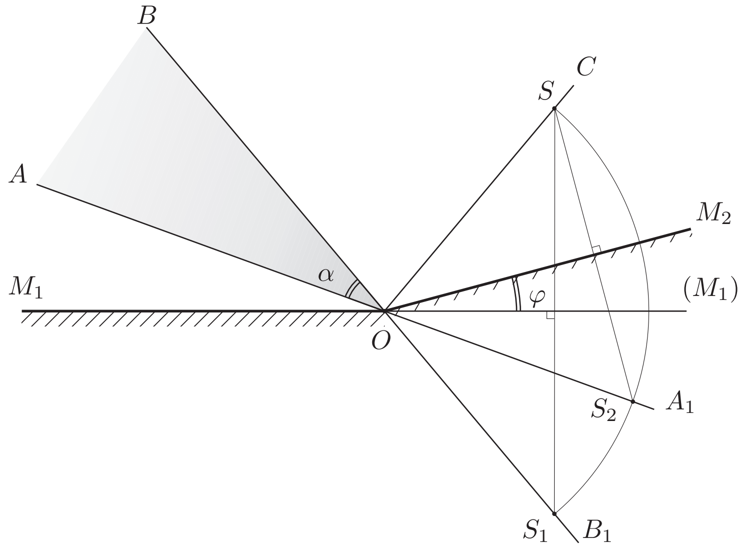

Рис. 21