# 10 класс

10.1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся. (*А. Голованов*)

**Первое решение.** Возьмем любые 5 из данных чисел: $a, b, c, d, e$. Если $abc > de$, то утверждение задачи верно. Если же $de \geqslant abc$, возьмем еще два числа $f$ и $g$. Пусть скажем $f > g$. Тогда $def > abcg$; значит, и в этом случае утверждение задачи верно.

**Второе решение.** Упорядочим данные числа по убыванию: $a_1 > a_2 > \ldots > a_{10}$. Тогда $a_1a_2a_3 > a_4a_5a_6$. Если $a_6 \geqslant 1$, то $a_1a_2a_3 > a_4a_5$. Иначе $a_6 < 1$, откуда $a_7 < 1$, и, значит, $a_1a_2a_3 > > a_4a_5a_6 > a_4a_5a_6a_7$.

**Замечание.** Из второго решения видно, что $a_1a_2a_3$ больше либо произведения любых двух из оставшихся чисел, либо произведения любых четырех из оставшихся.

10.2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые $BF$ и $CE$ параллельны. (*А. Акопян*)

**Решение.** Пусть $K$ — точка пересечения отрезков $AE$ и $BF$. Поскольку четырёхугольники $ABDF$ и $ACDE$ вписанные, мы имеем $\angle AFB = \angle ADB$ и $\angle ADC = \angle AEC$. Отсюда и из условия задачи получаем $\angle AKB = \angle AFB + \angle FAE = = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC = = \angle AEC$. Итак, $\angle AKB = \angle AEC$. Это и значит, что $BF \parallel CE$.

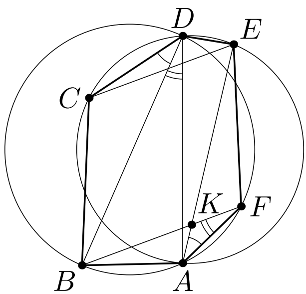

Рис. 4

10.3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

(*М. Мурашкин*)

**Первое решение.** Число $a_3 = 5\cdot 72 = 360$ целое. При $n \geqslant 4$ будут верны равенства
$$a_n = 5\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \quad \text{и} \quad a_{n-1} = 5\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-2}}{n-2},$$
откуда следует, что
$$a_n = \frac{5}{n-1}\left(\frac{n-2}{5}\,a_{n-1}+a_{n-1}\right) = \frac{n+3}{n-1}\,a_{n-1}.$$
Значит, если $n \geqslant 4$, то число
$$a_n = \frac{(n+3)(n+2)\cdot\ldots\cdot 7}{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}\cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n$$
является целым, что и требовалось доказать.

**Второе решение.** Положим $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, тогда $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Для решения задачи достаточно показать, все что числа $S_n$ — целые. Из условия имеем $S_1 = 1$, $S_2 = 144$, а формула $a_{n+1} = 5\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ принимает вид $S_{n+1} - S_n = \frac{5S_n}{n}$, откуда $S_{n+1} = \frac{n+5}{n}S_n$. Значит, при $n \geqslant 2$ получаем
$$S_{n+1} = \frac{(n+5)(n+4)\cdot\ldots\cdot 7}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}S_2 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot 144 = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}.$$
Так как хотя бы одно из чисел $n+5, n+4, n+3, n+2, n+1$ делится на 5, то при $n \geqslant 2$ число $S_{n+1}$ — целое.

10.4. На окружности отмечено $2N$ точек ($N$ — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из $N$ хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний. (*В. Шмаров*)

**Ответ.** 1.

**Первое решение.** Индукцией по $N$ докажем, что чётных паросочетаний на 1 больше, чем нечётных. Для $N = 1$ утверждение очевидно: есть лишь одно паросочетание, и оно чётно. Теперь докажем утверждение для $2N$ точек, предполагая, что оно верно для $2(N-1)$ точек. Обозначим отмеченные точки $A_1, A_2, \ldots, A_{2N}$ в порядке обхода окружности по часовой стрелке.

**Лемма.** *Пусть в паросочетании участвует хорда $A_1A_i$. Тогда при чётном $i$ она пересекает чётное число хорд, а при нечётном $i$ — нечётное.*

**Доказательство.** Пусть хорду $A_1A_i$ пересекают ровно $k$ хорд. Рассмотрим точки $A_2, \ldots, A_{i-1}$; ровно $k$ из них являются концами хорд, пересекающих $A_1A_i$ (по одному концу каждой хорды). Остальные $i-2-k$ точек разбиваются на пары точек, соединенных хордами, которые не пересекают $A_1A_i$. Таким образом, число $i-2-k$ чётно, то есть числа $i$ и $k$ имеют одинаковую чётность. Лемма доказана. □

Разобьём теперь все паросочетания на $2N-1$ группу $\Pi_2, \ldots, \Pi_{2N}$: в группу $\Pi_i$ попадут те паросочетания, в которых точка $A_1$ соединена с $A_i$. Теперь выкинем из каждого паросочетания из $\Pi_i$ хорду $A_1A_i$; получатся все возможные паросочетания на оставшихся $2N-2$ точках. По предположению индукции, среди них чётных на одно больше, чем нечётных. При этом, если $i$ чётно, то согласно лемме чётность паросочетания при выкидывании не менялась, а если $i$ нечётно, то менялась. Значит, в каждом из $N$ множеств $\Pi_2, \ldots, \Pi_{2N}$ чётных паросочетаний на одно больше, чем нечётных, а в каждом из $N-1$ множеств $\Pi_3, \ldots, \Pi_{2N-1}$ нечётных на одно больше, чем чётных. Итого, всего чётных паросочетаний больше, чем нечётных, на $N-(N-1) = 1$, что и требовалось доказать.

**Второе решение.** Приведём другое доказательство шага индукции.

Пусть отмеченные точки — $A_1, \ldots, A_{2N}$. Рассмотрим все паросочетания, в которых $A_{2N-1}$ и $A_{2N}$ соединены хордой. Эта хорда не пересекается ни с одной другой. Значит, выбросив её из каждого из рассматриваемых паросочетаний, мы получим все паросочетания на точках $A_1, \ldots, A_{2N-2}$, причём чётность каждого из них сохранится. По предположению индукции, среди наших паросочетаний чётных на одно больше, чем нечётных.

Для завершения доказательства достаточно показать, что среди всех остальных паросочетаний поровну чётных и нечётных. Рассмотрим любое из них; пусть в нём есть хорды $A_{2N-1}A_i$ и $A_{2N}A_k$. Теперь «поменяем местами» точки $A_{2N-1}$ и $A_{2N}$, то есть заменим наши хорды на $A_{2N}A_i$ и $A_{2N-1}A_k$. При этом, если исходная хорда пересекалась с какой-то из остальных, то и новая хорда будет с ней пересекаться. С другой стороны, если хорды $A_{2N-1}A_i$ и $A_{2N}A_k$ не пересекались, то новые хорды будут пересекаться, и наоборот. Итак, каждому оставшемуся чётному паросочетанию мы сопоставили нечётное, и наоборот; при этом разным паросочетаниям, очевидно, соответствуют разные. Значит, оставшихся чётных и нечётных паросочетаний поровну, что и требовалось доказать.

10.5. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырёх различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными? (*Н. Агаханов, П. Кожевников*)

**Ответ.** Не могут.

**Решение.** Предположим противное; тогда все углы пятиугольника — различные числа из интервала $(0, \pi)$. Заметим сразу, что тогда у Пети не найдётся трёх равных чисел, ибо в этом интервале нет трёх различных углов с равными синусами.

Значит, у Пети должны быть две пары равных чисел: $\sin\alpha = \sin\beta$ и $\sin\gamma = \sin\delta$. Поскольку $\alpha \neq \beta$, мы получаем $\alpha = \pi - \beta$; аналогично $\gamma = \pi - \delta$.

Пусть теперь $\varepsilon$ — пятый угол пятиугольника. Поскольку сумма углов пятиугольника равна $3\pi$, имеем $\varepsilon = 3\pi - (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta) = 3\pi - \pi - \pi = \pi$. Это невозможно, так как $\varepsilon < \pi$.

10.6. Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1+a$, $1+a^2$, $1+a^3$, $\ldots$, $1+a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске? (*О. Подлипский*)

**Ответ.** 4 числа.

**Решение.** Покажем сначала, что искомых чисел не может быть более четырех. Заметим, что если $k$ — нечётное, то число $1+a^{nk} = 1^k + (a^n)^k$ делится на $1+a^n$. Далее, каждое из чисел $1, 2, \ldots, 15$ имеет один из видов $k, 2k, 4k, 8k$, где $k$ нечётно. Таким образом, каждое из чисел $1+a$, $1+a^2$, $1+a^3$, $\ldots$, $1+a^{15}$ делится либо на $1+a$, либо на $1+a^2$, либо на $1+a^4$, либо на $1+a^8$. Поэтому, если мы возьмем хотя бы пять чисел, то среди них найдутся два, делящиеся на одно и то же число, большее 1; значит, они не будут взаимно просты. Итак, оставшихся чисел не более четырех.

Осталось показать, что четыре числа могли остаться. Действительно, если $a = 2$, то можно оставить числа $1+2 = 3$, $1+2^2 = 5$, $1+2^4 = 17$ и $1+2^8 = 257$. Все они попарно взаимно просты.

**Замечание.** Можно показать, что при любом чётном $a$ числа $1+a, 1+a^2, 1+a^4, 1+a^8$ буду попарно взаимно просты.

10.7. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате $2 \times 2$ одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких $n$ за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами? (*Б. Трушин*)

**Ответ.** При всех $n$, кратных трём.

**Решение.** Предположим, что нам удалось перекрасить клетки так, как требуют условия задачи. Будем называть клетками первого типа те, которые первоначально были белыми, а второго типа — те, которые были чёрными. Заметим, что если какую-то клетку перекрасили три раза, то в итоге она свой цвет не поменяла. Поэтому для того, чтобы клетка первого типа стала чёрной, её нужно перекрасить $3k+1$ раз при некотором целом $k$ (для разных клеток $k$ может быть разным). Значит, если $a$ — количество клеток первого типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3K+a$ при некотором целом $K$. Чтобы клетка второго типа стала белой, её нужно перекрасить $3m+2$ раза. Значит, если $b$ — количество клеток второго типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3M+2b$ раз.

Далее, в любом квадрате $2\times 2$ клеток первого и второго типа поровну. Поэтому, как бы мы не перекрашивали, суммарно клетки первого и второго типов будут перекрашены одинаковое число раз. Поэтому $3K+a=3M+2b$, откуда $a+b=3(M-K+b)$, то есть общее количество клеток $a+b$ делится на три. Значит $n^2$ кратно трем, а поэтому и $n$ кратно трем.

Осталось показать, как можно перекрасить квадрат со стороной, кратной трем. Разрежем его на квадраты $3\times 3$. Рассмотрим один из таких квадратов. Есть два случая — либо угловые клетки белые, либо чёрные. В первом случае перекрашиваем каждый из четырех квадратов, примыкающих к углам по одному разу, а во втором случае — по два раза. Легко проверить, что при таком перекрашивании шахматная раскраска поменяется на противоположную.

**Замечание.** В доказательстве того, что $n$ делится на 3, можно рассматривать не все $n^2$ клеток, а $n$ клеток в одном горизонтальном или вертикальном ряду, скажем, $n$ клеток, примыкающие к нижней стороне.

10.8. В трапеции $ABCD$ боковая сторона $CD$ перпендикулярна основаниям, $O$ — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника $OCD$ взята точка $S$, диаметрально противоположная точке $O$. Докажите, что $\angle BSC=\angle ASD$.

(*В. Шмаров*)

**Решение.** Так как $SO$ — диаметр, то $\angle SCA=\angle SCO= =\angle SDO=\angle SDB=90^\circ$. Для решения достаточно доказать подобие прямоугольных треугольников $SCA$ и $SDB$. Действительно, из подобия будет следовать равенство углов $\angle CSA = \angle DSB$, откуда $\angle BSC = \angle CSA - \angle ASB = \angle DSB - \angle ASB = \angle ASD$.

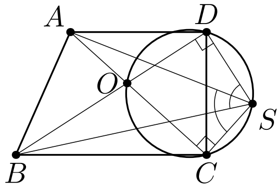


Рис. 5

Итак, достаточно показать, что $\frac{AC}{BD} = \frac{SC}{SD}$. Из прямоугольных треугольников $ADC$ и $BCD$ имеем $\frac{AC}{BD} = \frac{CD}{\cos\angle OCD} : \frac{CD}{\cos\angle ODC} = \frac{\cos\angle ODC}{\cos\angle OCD}$. Так как $\angle OCD = 90^\circ - \angle SCD$, то $\cos\angle OCD = \sin\angle SCD$. Аналогично $\cos\angle ODC = \angle\sin SDC$. Отсюда $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\angle SDC}{\sin\angle SCD} = \frac{SC}{SD}$ (последнее равенство следует из теоремы синусов), откуда и следует требуемое подобие.

**Замечание.** Точки $A$ и $B$ являются изогонально сопряженными точками относительно треугольника $SCD$.