11 класс

11.1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух различных её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть a — один из членов прогрессии, а d — её разность. По условию, числа $a(a+d)$ и $a(a+2d)$ — также члены прогрессии; значит, их разность имеет вид nd при некотором целом n, то есть $a(a+2d) - a(a+d) = nd$, или $ad = nd$. Поскольку $d > 0$, получаем $a = n$, то есть a — целое число. В силу произвольности выбора члена прогрессии, задача решена.

11.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть P — точка пересечения данных прямых. Поскольку $PA \parallel SC$ и $PC \parallel SA$, точка P лежит в плоскости SAC, а четырёхугольник $ASCP$ — параллелограмм. Значит, прямая SP делит отрезок AC пополам. Аналогично, прямая SP делит отрезок BD пополам. Значит, прямая SP пересекает плоскость основания пирамиды в точке пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, и диагонали делятся этой точкой пополам. Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

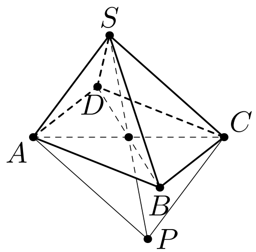

Рис. 6

11.3. На плоскости нарисованы $n > 2$ различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы

$$-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \ldots, \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$$

также имеют равные длины. Докажите, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$. (*В. Сендеров*)

Решение. Отложим векторы $2\vec{a}_1, \ldots, 2\vec{a}_n$ из одной точки:

пусть $\overrightarrow{OA_i} = 2\vec{a}_i$. Тогда все точки $A_1, \ldots, A_n$ различны и лежат на окружности ω с центром O.

Пусть $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$. Рассмотрим точку S такую, что $\overrightarrow{OS} = \vec{s}$; по условию, все векторы $\vec{s} - 2\vec{a}_i$ имеют одну и ту же длину r. Поскольку $\overrightarrow{SA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OS} = 2\vec{a}_i - \vec{s}$, это означает, что все точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на окружности Ω с центром S и радиусом r.

Итак, окружности ω и Ω имеют $n > 2$ общих точек. Это значит, что они совпадают, а тогда и их центры совпадают, то есть $\vec{s} = \vec{0}$. Это и требовалось доказать.

11.4. Главная аудитория фирмы «Рога и копыта» представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше, чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.) (*К. Чувилин*)

Ответ. Могло.

Решение. Обозначим первый ответ на каждый вопрос через нуль, а второй — через единицу. Тогда каждому набору ответов соответствует набор из шести нулей и единиц. Аудиторию будем представлять в виде таблицы 8×8, в клетки которой расставляются наборы из шести цифр. Нам требуется заполнить таблицу так, чтобы соседние по вертикали или горизонтали наборы совпадали не более чем по одной цифре. Чётностью набора будем называть чётность суммы его цифр.

Покажем сначала, как заполнить клетки так, чтобы соседние наборы *различались* ровно по одной цифре. Пусть в наборах любой строки последние три цифры одинаковы, а первые три определяются слева направо так: 000, 001, 011, 010, 110, 100, 101, 111. Тогда любые два соседние по горизонтали набора различаются ровно по одной цифре. В каждом столбце последние три цифры определим таким же образом сверху вниз.

Аналогично получится, что любые два соседние по вертикали набора различаются ровно по одной цифре. Остается заметить, что все наборы различны, поскольку наборы из разных столбцов отличаются в первых трёх цифрах, а из разных строк — во вторых трёх.

Покрасим теперь все клетки таблицы в белый и чёрный цвета в шахматном порядке так, чтобы левая верхняя клетка была белой. Тогда все чётные наборы попадут в белые клетки, а все нечётные — в чёрные. В каждом наборе в чёрных клетках заменим единицы на нули, а нули — на единицы. Заметим, что при таком обращении чётность набора не изменится, поэтому по-прежнему во всех белых клетках будут чётные наборы, а во всех чёрных — нечётные. При этом все нечётные наборы будут попарно различаться (в противном случае какие-то два набора совпадали бы до обращения), аналогично все чётные будут попарно различаться. Значит, и все наборы будут различны. Наконец, любые две соседние клетки имеют разные цвета, и, поскольку до обращения наборы в них различались ровно по одной цифре, после обращения наборы будут совпадать ровно по одной цифре.

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010

Рис. 7

На рис. 7 показан пример аналогичной расстановки для квадрата 4×4.

11.5. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}$. (*В. Сендеров*)

Решение. При $n = 1$ неравенство верно, ибо $0 < 1$. Пусть $n > 1$. Заметим, что $0 < n-1 < n+1$, поэтому

$$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < (n-1)^n(n+1)^n = (n^2-1)^n < (n^2)^n = n^{2n},$$

что и требовалось доказать.

11.6. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две непустые группы так, что любая команда первой группы одержала ровно n побед, а любая команда второй группы — ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что $m \neq n$. Всего в турнире с участием 73 команд проводится $\frac{73 \cdot 72}{2} = 36 \cdot 73$ игр. Пусть x команд одержали по n побед, а остальные $73 - x$ команд — по m побед. Тогда получаем равенство $x \cdot n + (73 - x) \cdot m = 36 \cdot 73$, откуда $x \cdot (n - m) = (36 - m) \cdot 73$. Число 73 — простое, поэтому на него делится либо множитель x, либо множитель $n - m$. Первое невозможно, так как $x < 73$. А второе невозможно, так как $n < 73, m < 73$, следовательно, $0 < |n - m| < 73$.

11.7. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

(*И. Богданов*)

Решение. Пусть для определённости $a > b$.

Если (x_0, y_0) — одна из точек пересечения, то $\sin ax_0 - \sin bx_0 = 0$, или

$$\sin \frac{a-b}{2} x_0 \cdot \cos \frac{a+b}{2} x_0 = 0.$$

Значит, $\frac{a-b}{2} x_0 = k\pi$ или $(a+b)x_0 = (2k+1)\pi$ при некотором целом k, откуда следует, что одно из чисел $\frac{a-b}{2\pi} x_0$ или $\frac{a+b}{\pi} x_0$ целое.

Подберём теперь число c такое, чтобы во всех таких точках число $\frac{a-c}{2\pi} x_0$ также было целым; тогда в этих точках мы будем иметь

$$\sin \frac{a-c}{2} x_0 \cdot \cos \frac{a+c}{2} x_0 = 0,$$

или $\sin cx_0 = \sin ax_0 = y_0$, что и требуется.

Для этого достаточно положить, например, $c = 2(a^2 - b^2) + a$. Действительно, тогда число $\frac{a-c}{2\pi} x_0 = (b-a) \cdot \frac{b+a}{\pi} x_0 = 2(b + a) \cdot \frac{b-a}{2\pi} x_0$ в целое число раз больше каждого из чисел $\frac{a-b}{2\pi} x_0$

и $\dfrac{a+b}{\pi}x_0$, то есть является целым. Кроме того, $c > a > b$. Это и означает, что c удовлетворяет требованиям.

11.8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ$.

(*И. Богданов, К. Кноп*)

Первое решение. Обозначим через $f(ABCD)$ сумму четырёх углов в условии. Заметим, что если четырёхугольник $ABCD$ вписан, то утверждение верно. Действительно, тогда $f(ABCD) = (\angle BAC + \angle CAD) + (\angle DCA + \angle ACB) = \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

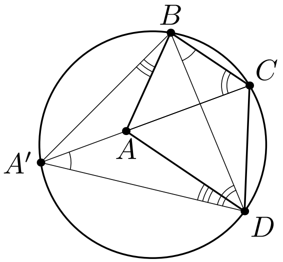

Рис. 8

Пусть теперь четырёхугольник не вписан. Тогда описанная окружность треугольника BCD пересекает прямую AC вторично в точке $A' \neq A$. Заметим, что $f(A'BCD) - f(ABCD) = (\angle BA'C - \angle BAC) + (\angle A'DB - \angle ADB) = \pm(\angle ABA' - \angle ADA')$, где знак перед последней скобкой зависит от порядка точек A, A' на прямой AC. Поскольку $f(A'BCD) = 180^\circ$, нам достаточно доказать, что $\angle ABA' = \angle ADA'$.

По условию, мы имеем $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = k$. Пусть радиус описанной окружности четырёхугольника $A'BCD$ равен R. Тогда по теореме синусов $2R = \dfrac{BC}{\sin BA'C} = \dfrac{CD}{\sin CA'D}$; умножая последнее равенство на k, получаем $\dfrac{AB}{\sin AA'B} = \dfrac{AD}{\sin AA'D}$. Применяя теорему синусов к треугольникам ABA' и ADA', получаем $\dfrac{AA'}{\sin ABA'} = \dfrac{AB}{\sin AA'B} = \dfrac{AD}{\sin AA'D} = \dfrac{AA'}{\sin ADA'}$. Итак, $\sin ABA' = \sin ADA'$, то есть либо углы $\angle ABA'$ и $\angle ADA'$ равны, либо их сумма равна 180°. Наконец, второй случай невозможен; действительно, сумма углов невыпуклого четырёхугольника $ABA'D$ равна 360°, поэтому $\angle ABA' + \angle ADA' < 180^\circ$.

Второе решение. Из условия следует, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$. Если эти отношения равны 1, то треугольники ABC и ADC равно-

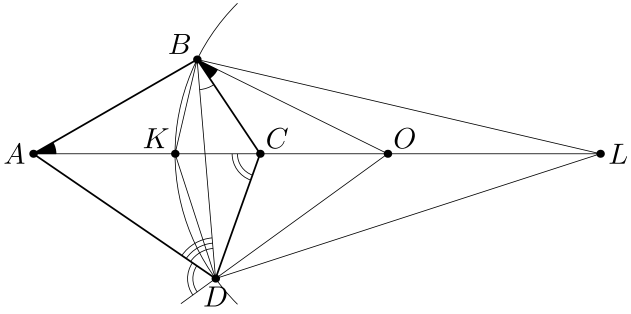

Рис. 9

бедренные, и четырёхугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD; значит, $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = \angle BAC + \angle ABD + \angle DAC + \angle ADB = \angle ABD + \angle ADB + \angle DAB = 180^\circ$, что и требовалось.

Пусть теперь, для определённости, $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} > 1$. Пусть BK и BL — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ABC (см. рис. 9). Тогда $\frac{AK}{KC} = \frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$; значит, DK и DL — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ADC. Отсюда следует, что $\angle KBL = \angle KDL = 90^\circ$, и четырёхугольник $BKDL$ вписан в окружность с центром в точке O — середине отрезка KL.

Из равнобедренного треугольника OKB получаем $\angle OBK = \angle OKB = \angle ABK + \angle KAB = \angle CBK + \angle CAB$, откуда $\angle CAB = \angle OBK - \angle CBK = \angle OBC$. Значит, $\angle CAB + \angle CBD = \angle OBC + \angle CBD = \angle OBD$. Аналогично, из равнобедренного треугольника ODK получаем $\angle ODA = \angle ODK + \angle KDA = \angle OKD + \angle CDK = 180^\circ - \angle DCK$, откуда $\angle DCA + \angle ADB = (180^\circ - \angle ODA) + \angle ADB = 180^\circ - \angle ODB$.

Итак, сумма всех четырёх углов в условии равна $\angle OBD + 180^\circ - \angle ODB = 180^\circ$, поскольку треугольник OBD равнобедренный. Это и требовалось доказать.