Условия и решения задач

9 класс

9.1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске? (*И. Богданов*)

Ответ. 3 числа.

Решение. Предположим, что чисел хотя бы четыре, и a — число с минимальным модулем. Из остальных чисел хотя бы два имеют один знак (оба неотрицательны или оба неположительны). Обозначим их b и c; тогда $bc = |bc| \geqslant |a|^2 = a^2$, что противоречит условию.

Осталось привести пример трёх чисел, удовлетворяющих условию. Подходят, например, числа $1, 2, -3$.

9.2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2. (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть O_1, r_1 и O_2, r_2 — соответственно центры

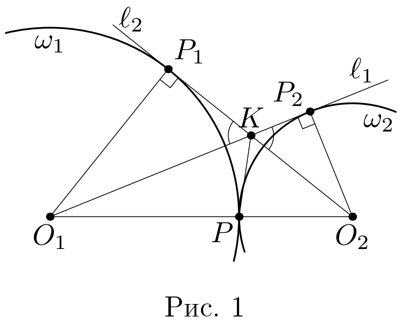

Рис. 1

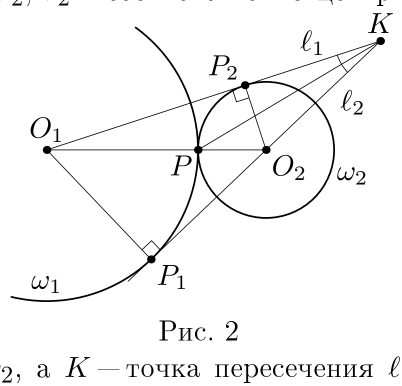

Рис. 2

и радиусы окружностей ω_1 и ω_2, а K — точка пересечения ℓ_1 и ℓ_2. Заметим, что точка P лежит на отрезке O_1O_2 и делит его в отношении $r_1 : r_2$.

Обозначим через P_1 точку касания ℓ_2 и ω_1, а через P_2 точку касания ℓ_1 и ω_2. Прямоугольные треугольники KO_1P_1 и KO_2P_2 подобные по острому углу при вершине K. Значит, $\frac{KO_1}{KO_2} = \frac{O_1P_1}{O_2P_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Таким образом, в треугольнике KO_1O_2 точка P, лежащая на стороне O_1O_2, делит её в отношении, равном отношению прилежащих сторон KO_1 и KO_2. Из этого следует, что P — основание биссектрисы треугольника KO_1O_2.

Замечание. В задаче возможны два принципиально различных случая расположения точек и прямых. Они показаны на рис. 1 и рис. 2. Приведённое решение не зависит от случаев.

9.3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.) (*С. Агаханов*)

Ответ. 0.

Решение. Из условия следует, что все сидящие за столом разбиваются на пары друзей; значит, рыцарей и лжецов поровну. Рассмотрим любую пару друзей. Если они сидят рядом, то рыцарь на заданный вопрос ответит «да», а лжец — «нет». Если же они не сидят рядом, то их ответы будут противоположными. В любом случае ровно один из пары друзей даст ответ «да». Значит, при любой рассадке все остальные 15 ответов будут «нет».

9.4. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$. (*А. Голованов*)

Решение. Предположим противное. Ясно, что тогда числа a и b натуральные. Действительно, если, скажем, $a < 0$, то, подставляя $m = 2|b|$, $n = 1$, получаем, что число $4ab^2 + b\cdot 1 = b(4ab+ +1)$ должно быть квадратом некоторого числа x. С другой стороны, если $a < 0$, то числа b и $4ab+1$ имеют разные знаки, так что $x^2 < 0$. Это невозможно.

Подставим теперь $m = 2b$, $n = 1$ и $m = 2b$, $n = 2$. Получим, что $4ab^2 + b = x^2$ и $4ab^2 + 4b = y^2$ при некоторых натуральных x, y. Ясно, что $y^2 > x^2 > 4b^2$, поэтому $y > x > 2b$. Но тогда $3b = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) \geqslant 1 \cdot 4b$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

9.5. Фокусник выкладывает 36 карт в виде квадрата 6×6 (в 6 столбцов по 6 карт) и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

(*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть Фокусник после первого действия не тасует карты, а собирает их, не нарушая порядок в столбцах, и складывает в колоду один столбец за другим. Второй раз он выкладывает карты построчно, т.е. бывшие столбцы становятся строками (это нетрудно сделать, выкладывая ту же колоду по горизонтали). После ответа Зрителя, Фокусник знает номер строки и столбца в первой раскладке, содержащих загаданную карту, что и позволяем ему назвать её.

Замечание. Приведённый алгоритм — не единственный возможный.

9.6. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 2$.

(*И. Богданов*)

Решение. Заметим, что $2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(a^3 - b^3) = (a^5 - b^5) + a^2b^2(a - b) \geqslant 4 + a^2b^2(a - b)$. Поскольку $a^3 > b^3$, мы имеем $a > b$, а значит, $a^2b^2(a - b) \geqslant 0$. Итак, $2(a^2 + b^2) \geqslant 4$, откуда и следует утверждение задачи.

9.7. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно. (*Т. Емельянова*)

Решение. Пусть B_0 — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Можно считать, что точка D лежит на отрезке AB_0. Точки A_0 и C_0 симметричны точке B_0 относительно биссектрис углов C и A соответственно. Следовательно, точка E лежит на отрезке AC_0, а точка F — на продолжении отрезка CA_0, и $EC_0 = DB_0 = FA_0$.

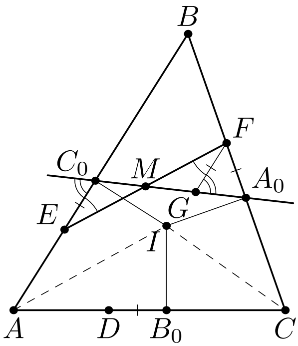

Рис. 3

Обозначим теперь через M точку пересечения прямых EF и A_0C_0 (она лежит на отрезке EF). Отметим на прямой A_0C_0 точку G так, чтобы отрезки FG и AB были параллельны. Тогда треугольники FGA_0 и BC_0A_0 подобны; поскольку $BC_0 = BA_0$, получаем $FG = FA_0 = EC_0$. Далее, из параллельности имеем $\angle FEC_0 = \angle EFG$ и $\angle EC_0G = \angle FGC_0$. Значит, треугольники EC_0M и FGM равны по стороне и двум углам, и $EM = MF$.

9.8. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами? (*Б. Трушин*)

Ответ. При всех n, кратных трём.

Решение. Предположим, что нам удалось перекрасить клетки так, как требуют условия задачи. Будем называть клетками первого типа те, которые первоначально были белыми, а второго типа — те, которые были чёрными. Заметим, что если какую-то клетку перекрасили три раза, то в итоге она свой цвет не поменяла. Поэтому для того, чтобы клетка первого типа стала чёрной, её нужно перекрасить $3k + 1$ раз при некотором целом k (для разных клеток k может быть разным). Значит, если a — количество клеток первого типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3K + a$ при некотором целом K. Чтобы клетка второго типа стала белой, её нужно перекрасить $3m+2$ раза. Значит, если b — количество клеток второго типа, то общее количество перекрашиваний этих клеток равно $3M + 2b$ раз.

Далее, в любом квадрате 2×2 клеток первого и второго типа поровну. Поэтому, как бы мы не перекрашивали, суммарно клетки первого и второго типов будут перекрашены одинаковое число раз. Поэтому $3K+a = 3M+2b$, откуда $a+b = 3(M-K+b)$, то есть общее количество клеток $a + b$ делится на три. Значит n^2 кратно трем, а поэтому и n кратно трем.

Осталось показать, как можно перекрасить квадрат со стороной, кратной трем. Разрежем его на квадраты 3×3. Рассмотрим один из таких квадратов. Есть два случая — либо угловые клетки белые, либо чёрные. В первом случае перекрашиваем каждый из четырех квадратов, примыкающих к углам по одному разу, а во втором случае — по два раза. Легко проверить, что при таком перекрашивании шахматная раскраска поменяется на противоположную.

Замечание. В доказательстве того, что n делится на 3, можно рассматривать не все n^2 клеток, а n клеток в одном горизонтальном или вертикальном ряду, скажем, n клеток, примыкающие к нижней стороне.