10 класс

10.5. Существует ли такое натуральное n, что для любых ненулевых цифр a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$? (Здесь через $\overline{x\ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, …, y.) (*В. Сендеров*)

Ответ. Нет, не существует.

Решение. Предположим, что такое число $n = \overline{n_k n_{k-1} \ldots n_1}$ существует. Тогда $\overline{1n2} \,\vdots\, 12 \,\vdots\, 4$. Но число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из его последних двух цифр, делится на 4; значит, $\overline{n_1 2} \,\vdots\, 4$. Аналогично из $\overline{2n4} \,\vdots\, 24 \,\vdots\, 4$ получаем $\overline{n_1 4} \,\vdots\, 4$. Значит, и число $\overline{n_1 4} - \overline{n_1 2} = 2$ делится на 4, что не так.

10.6. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать? (*А. Голованов*)

Ответ. 50 чисел.

Решение. Покажем, что в каждый многочлен $P(x)$ Петя мог подставить не более пяти чисел. Действительно, пусть n-й член получившейся арифметической прогрессии равен $an + b$, а n-е из Васиных последовательных чисел равно $k+n$. Тогда Петя мог подставить это число в $P(x)$, если $P(k+n) = an + b$, а это — уравнение пятой степени относительно n, поэтому оно имеет не более пяти корней.

Итак, всего чисел не могло быть больше 50. Осталось показать, что 50 чисел могли получиться. Пусть, например, были выбраны многочлены

$$P_k(x) = x + (x - (5k-4)) \cdot (x - (5k-3)) \cdot \ldots \cdot (x - 5k)$$

при $k = 1, 2, \ldots, 10$, и Вася называл числа 1, 2, …, 50. Так как $P_k(5k - i) = 5k - i$ при $i = 0, 1, \ldots, 4$, у Пети могли получаться последовательно числа 1, 2, …, 50.

10.7. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся соответственно сторон BC, CA, AB. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 — в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

(*Л. Емельянов, А. Полянский*)

Решение. Прямые B_1C_1 и I_bI_c параллельны, так как обе эти прямые перпендикулярны биссектрисе AI угла BAC. Аналогично, $C_1A_1 \parallel I_cI_a$ и $A_1B_1 \parallel I_aI_b$; значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $I_aI_bI_c$ гомотетичны.

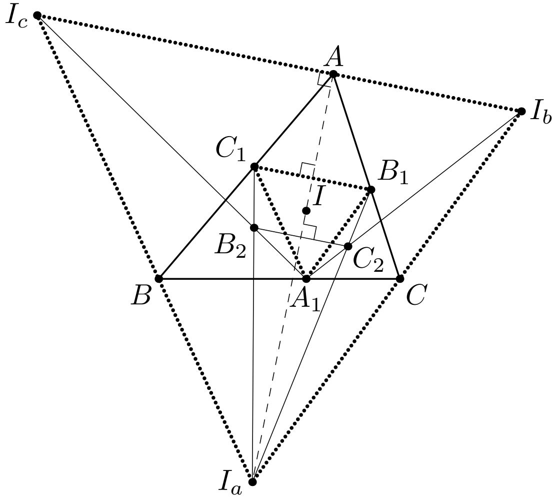

Рис. 5

Треугольники $A_1C_1B_2$ и $I_cI_aB_2$ подобны, так как их соответственные стороны параллельны. Аналогично, $\triangle A_1B_1C_2 \sim \sim \triangle I_bI_aC_2$. Из этих подобий следуют равенства $\frac{I_aB_2}{C_1B_2} = \frac{I_aI_c}{A_1C_1} = = \frac{I_aI_b}{A_1B_1} = \frac{I_aC_2}{B_1C_2}$. Заметим, что точки B_1 и C_1 симметричны относительно прямой AI_a; поскольку $\frac{I_aB_2}{C_1B_2} = \frac{I_aC_2}{B_1C_2}$, точки B_2 и C_2

также симметричны относительно неё, и $IB_2 = IC_2$. Аналогично получаем $IA_2 = IB_2 = IC_2$, что и требовалось доказать.

10.8. На плоскости нарисован квадрат, стороны которого горизонтальны и вертикальны. В нём проведены несколько отрезков, параллельных сторонам, причем никакие два отрезка не лежат на одной прямой и не пересекаются по точке, внутренней для обоих отрезков. Оказалось, что отрезки разбили квадрат на прямоугольники, причём любая вертикальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, пересекает ровно k прямоугольников разбиения, а любая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения — ровно ℓ прямоугольников. Каким могло оказаться количество прямоугольников разбиения? (*И. Богданов, Д. Фон-Дер-Флаасс*)

Ответ. $k\ell$.

Первое решение. Возьмём горизонтальную прямую h, проходящую через верхнюю сторону квадрата, и будем двигать её вниз. Рассмотрим момент, когда она проходит через какой-нибудь отрезок разбиения I (по условию, такой отрезок в этот момент только один; пусть к нему прилегают a прямоугольников сверху и b снизу). Количество прямоугольников, которые пересекает h, в этот момент уменьшается на a и увеличивается на b; поскольку оно не должно изменяться, получаем, что $a = b$.

Докажем теперь, что количество прямоугольников равно $k\ell$, индукцией по k. Если $k = 1$, утверждение очевидно. Пусть теперь $k > 1$. Рассмотрим все прямоугольники разбиения, прилегающие к нижней стороне квадрата; их ℓ штук, ибо горизонтальная прямая, проходящая достаточно близко к этой стороне, пересекает ровно их. Разобьём их на группы стоящих подряд прямоугольников равной высоты (см. рис. 6). У каждой такой группы верхней границей является один отрезок.

Рассмотрим одну такую группу с верхним отрезком I. Заметим, что вертикальные отрезки, ограничивающие эту группу, продолжаются выше, чем I. Действительно, иначе, скажем, верхний конец левого вертикального отрезка J лежит на I; тогда справа к J примыкает один прямоугольник, а слева — больше одного (ибо J граничный для группы). Это невозможно.

Выкинем эту группу, и «продлим» прямоугольники, лежащие сверху от I, до нижней стороны квадрата. Поскольку сверху и снизу к I прилегало равное количество прямоугольников, любая горизонтальная прямая по-прежнему будет пересекать ℓ прямоугольников.

Проделаем эту операцию с каждой группой (см. рис. 7). Мы выкинем ровно ℓ прямоугольников; при этом каждая вертикальная прямая будет пересекать на один прямоугольник меньше, нежели раньше, то есть $k-1$ прямоугольник. По предположению индукции, общее количество прямоугольников станет равно $(k-1)\ell$, а значит, до перестройки оно было равно $(k-1)\ell+\ell = k\ell$, что и требовалось доказать.

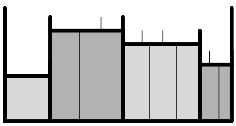

Рис. 6

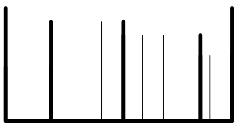

Рис. 7

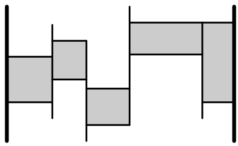

Рис. 8

Второе решение. Рассмотрим любой прямоугольник разбиения P и пересекающую его вертикальную прямую v (не содержащую отрезка разбиения). Пусть v пересекает $i-1$ прямоугольников разбиения, лежащих выше P; в этом случае будем говорить, что P имеет *вертикальный номер* i на прямой v. Аналогично определим *горизонтальный номер* прямоугольника P на горизонтальной прямой, пересекающей его.

Рассмотрим некоторый горизонтальный отрезок разбиения I и будем двигать вертикальную прямую v, пересекающую I, слева направо. Рассмотрим момент, когда v содержит какой-то отрезок разбиения (лежащий выше или ниже I). Как показано в начале предыдущего решения, слева и справа к этому отрезку примыкает одинаковое количество прямоугольников. Значит, вертикальный номер любого прямоугольника P, примыкающего к I, в этот момент не меняется; более того, номера соседних прямоугольников, прилегающих к I с одной стороны, равны, а для прилегающих с разных сторон он отличается на 1. Итак, любой прямоугольник P имеет один и тот же номер на всех вертикальных прямых, его содержащих. Аналогичные утверждения верны и для горизонтальных номеров.

Зафиксируем теперь число i и рассмотрим все прямоугольники $P_1, \ldots, P_x$, имеющие вертикальный номер i (пусть они занумерованы согласно абсциссам их левых границ слева направо). Будем двигать вертикальную прямую v от левой стороны квадрата к правой. В каждый момент (кроме тех, когда она содержит отрезок разбиения) v пересекает ровно один из прямоугольников P_s; значит, правая сторона очередного прямоугольника P_s лежит на той же прямой, что и левая сторона следующего прямоугольника P_{s+1} (см. рис. 8). Тогда эти прямоугольники примыкают с разных сторон к одному и тому же вертикальному отрезку разбиения, поэтому горизонтальный номер прямоугольника P_{s+1} на 1 больше, чем горизонтальный номер P_s. Ясно, наконец, что горизонтальные номера прямоугольников P_1 и P_x равны 1 и ℓ; значит, $x = \ell$.

Итак, для каждого из k вертикальных номеров есть ровно ℓ прямоугольников с таким номером; поэтому общее число прямоугольников равно $k\ell$.

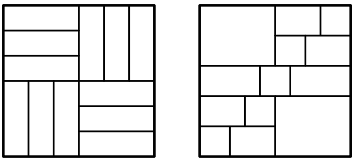

Рис. 9

Замечание. Условия, наложенные на отрезки разбиения, существенны, как показывают примеры на рис. 9.