11 класс

11.1. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x)=Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1)=Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть $P(x)=x^{10}+p_9x^9+\ldots+p_0$ и $Q(x)=x^{10}+$ $+q_9x^9+\ldots+q_0$. Тогда многочлен $P(x)-Q(x)=(p_9-q_9)x^9+\ldots+$ $+(p_0-q_0)$ не имеет действительных корней; но, если $p_9\neq q_9$, то степень этого многочлена нечётна, и корень у него есть. Значит, $p_9=q_9$.

Заметим теперь, что $P(x+1)=x^{10}+(p_9+10)x^9+\ldots$ и $Q(x-1)=x^{10}+(q_9-10)x^9+\ldots$; значит, многочлен $P(x+1)-$ $-Q(x-1)=20x^9+\ldots$ имеет девятую степень и, следовательно, имеет корень.

11.2. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный. (Вневписанная сфера пирамиды касается одной её грани, а также плоскостей остальных граней вне этих граней.) (*В. Шмаров*)

Первое решение. Пусть X — точка касания плоскости (BCD) со вписанной сферой. Пусть гомотетия с центром в точке A, переводящая вневписанную сферу во вписанную, переводит точку Y в некоторую точку Z вписанной сферы. Эта гомотетия переводит плоскость (BCD) в плоскость, параллельную (BCD) и касающуюся вписанной сферы в точке Z. Это означает, что X и Z — диаметрально противоположные точки вписанной сферы, а следовательно, $XZ\perp(BCD)$. Поскольку Z лежит на отрезке AY, то $\angle AXY>\angle ZXY=90^\circ$, откуда и следует требуемое.

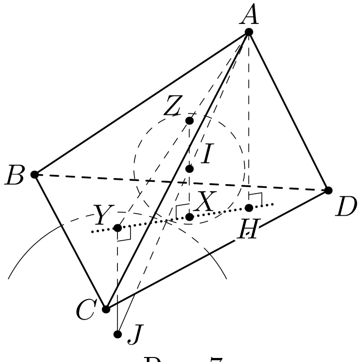

Рис. 7

Второе решение. Пусть I и J — соответственно центры вписанной и вневписанной сфер, и пусть AH — высота пирамиды. Точки A, I и J лежат на одной прямой (все точки которой равноудалены от плоскостей (ABC), (ACD) и (ADB)), причём I лежит между A и J. Значит, их проекции H, X и Y на плоскость (BCD) также лежат на одной прямой, причём X лежит между H и Y. Итак, основание высоты AH треугольника AXY лежит вне стороны XY; это и значит, что этот треугольник тупоугольный.

11.3. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k нечётных простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

(*В. Сендеров*)

Ответ. Таких k не существует.

Решение. Пусть $n \geqslant 2$, и $3 = p_1 < \ldots < p_k$ — первые k нечётных простых чисел. Предположим, что

$$3 \cdot \ldots \cdot p_k = a^n + 1. \qquad (*)$$

Возможны два случая.

Случай 1. Пусть a является степенью двойки. Заметим, что степени двойки дают лишь остатки 1, 2 и 4 при делении на 7, а $a^n + 1$ делится на 7 при $k \geqslant 3$. Значит, $k \leqslant 2$, и возможными значениями для a^n являются лишь $3 - 1 = 2$ и $3 \cdot 5 - 1 = 14$. Оба варианта не подходят.

Случай 2. Пусть у числа a существует нечётный простой делитель q. Тогда $q > p_k$, иначе левая часть равенства $(*)$ делилась бы на q, что невозможно. Поэтому и $a > p_k$.

Без ограничения общности можно считать, что n — простое число (если $n = st$, то можно заменить n на t, а a — на a^s). Заметим, что $n > 2$, поскольку $a^2 + 1$ не может делиться на $3 = p_1$.

Покажем теперь, что $n > p_k$. В противном случае имеем $n = p_i$ при некотором $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда $a^{p_i} + 1 \,\vdots\, p_i$; с другой стороны, по малой теореме Ферма $a^{p_i} - a \,\vdots\, p_i$. Значит, число $a + 1 = (a^{p_i} + 1) - (a^{p_i} - a)$ также делится на p_i. Заметим, что $1 + a^{p_i} = (1 + a)(1 - a + \ldots + a^{p_i - 1})$, где $a + 1 \,\vdots\, p_i$ и

$$1 - a + \ldots + a^{p_i - 1} \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 = p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Значит, число $1+a^{p_i}$ делится на p_i^2, что невозможно по условию.

Итак, $a > p_k$ и $n > p_k$, откуда $a^n + 1 > p_k^{p_k} > 3 \cdot \ldots \cdot p_k$, что противоречит равенству (∗).

11.4. На каждой из 2013 карточек написано по числу, все эти 2013 чисел различны. Карточки перевёрнуты числами вниз. За один ход разрешается указать на десять карточек, и в ответ сообщат одно из чисел, написанных на них (неизвестно, какое). Для какого наибольшего t гарантированно удастся найти t карточек, про которые известно, какое число написано на каждой из них?

(*И. Богданов*)

Ответ. $t = 1986 = 2013 - 27$.

Решение. 1. Покажем сначала, что 1987 карточек угадать не удастся. Занумеруем карточки $A_1, \ldots, A_{2013}$; покажем, как устроить ответы так, чтобы ни одно из чисел на карточках $A_1, \ldots, A_{27}$ определить не удалось.

При каждом $i = 1, \ldots, 9$ объединим карточки A_{3i-2}, A_{3i-1}, A_{3i} в тройку T_i. Если среди указанных 10 карточек присутствует карточка A_n с $n > 27$, то ответим число n. Если же все 10 карточек лежат в тройках, то в какой-то тройке T_i лежат хотя бы две карточки; в этом случае мы ответим число, стоящее на ребре между этими карточками на рис. 8. Этим ответам удовлетворяют такие две ситуации: на карточках с номерами, большими 27, написаны их номера, и либо на каждой карточке из троек стоит число на ребре, выходящем из неё против часовой стрелки, либо на каждой такой карточке стоит число на ребре по часовой стрелке. Значит, ни одного из чисел на карточках в тройках определить нельзя.

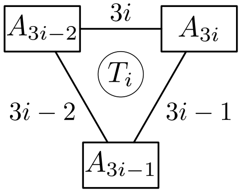

Рис. 8

2. Осталось доказать, что числа на всех карточках, кроме 27, определить удастся. Для этого мы покажем, что если задать все возможные вопросы о каких-то 28 карточках, то по ответам удастся определить число на одной из них. После этого эту карточку можно будет заменить на одну из оставшихся и повторить

процедуру; действуя так, мы в результате определим числа на всех карточках, кроме 27.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть в графе не менее, чем $3n-2$ вершины, и не более, чем $3n-2$ ребра ($n \geqslant 2$). Тогда найдутся n вершин, между которыми нет рёбер.*

Доказательство. Индукция по n. Сразу заметим, что можно выкинуть несколько вершин и после этого добавить несколько рёбер так, чтобы вершин и рёбер стало по $3n-2$. При $n=2$ на 4 вершинах меньше 6 рёбер; значит, какая-то пара вершин не соединена, и можно выбрать эти две вершины.

Пусть теперь $n > 2$. Обозначим степени вершин через $d_1, \ldots, d_{3n-2}$; тогда $d_1 + \ldots + d_{3n-2} = 2(3n-2)$. Значит, либо найдётся число $d_i < 2$ и число $d_j > 2$, либо все степени равны 2. В первом случае выкинем из графа i-ю и j-ю вершину, а также единственного соседа i-й вершины (если он есть); мы выкинули не более 3 вершин и не менее 3 рёбер. Во втором случае выкинем произвольную вершину (пусть её номер равен i) и двух её соседей; так как их степени равны 2, то опять же мы выкинули не менее 3 рёбер (и ровно 3 вершины). В оставшемся графе по предположению индукции найдутся $n-1$ вершина без рёбер между ними; добавив к ним i-ю вершину, получаем требуемый набор из n вершин (поскольку мы выкинули всех соседей i-й вершины). Лемма доказана. $\square$

Вернёмся к решению. Пусть мы задали все вопросы о 28 карточках, и пусть $c_1, \ldots, c_k$ — все числа, встречающиеся в ответах (тогда $k \leqslant 28$). Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ рассмотрим все десятки карточек, в ответ на которые мы получали число c_i; обозначим их пересечение через S_i (ясно, что это множество непусто, ибо оно содержит карточку с числом c_i). Если в этом множестве один элемент, то это и есть карточка с числом c_i, и мы определили число на ней.

В противном случае, в каждом из множеств хотя бы по две карточки. При каждом i выберем две карточки в S_i и соединим их ребром. Мы получили граф, удовлетворяющий условию леммы при $n = 10$; значит, в нём можно выбрать 10 карточек без рёбер между ними. Ответом на эту десятку было какое-то число c_i. Значит, в этой десятке должно содержаться множество S_i, а значит, две карточки из десятки соединены соответствующим ребром. Противоречие, завершающее решение задачи.