Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b)=x-c$, $(x-b)(x-c)=$ $=x-a$, $(x-c)(x-a)=x-b$ имеют решение. (*И. Богданов*)

Первое решение. Обозначим $f_1(x)=(x-b)(x-c)-(x-a)$, $f_2(x)=(x-c)(x-a)-(x-b)$ и $f_3(x)=(x-a)(x-b)-(x-c)$. Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть максимум у одной из этих функций есть корень. Значит, две из них — скажем, f_1 и f_2 — корней не имеют. Поскольку старшие коэффициенты этих квадратных многочленов положительны, получаем, что $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$ при всех x. Однако многочлен

$$f_1(x)+f_2(x)=(x-c)(x-b+x-a)-(x-a+x-b)=$$
$$=(2x-a-b)(x-c-1)$$

имеет, например, корень $x_0=c+1$; значит, неверно, что $f_1(x_0)>0$ и $f_2(x_0)>0$. Противоречие.

Второе решение. Пусть для определённости $a<b<c$. Рассмотрим графики функций $f_{bc}(x)=(x-b)(x-c)$ и $f_a(x)=$ $=x-a$. При $x=a$ точка первого графика выше точки второго: $f_{bc}(a)=(a-b)(a-c)>0=f_a(a)$, а при $x=b$ — ниже: $f_{bc}(b)=$ $=0<b-a=f_a(b)$. Значит, уравнение $f_{bc}(x)=f_a(x)$ имеет корень на отрезке $[a,b]$ (см. рис. 1).

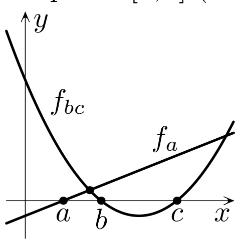

Рис. 1

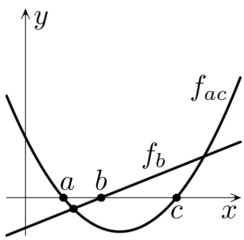

Рис. 2

Аналогично, если рассмотреть графики функций $f_{ac}(x)=$ $=(x-a)(x-c)$ и $f_b(x)=x-b$, то получим, что $f_{ac}(a)>f_b(a)$

и $f_{ac}(b) < f_b(b)$, так что уравнение $f_{ac}(x) = f_b(x)$ также имеет корень на отрезке $[a, b]$ (см. рис. 2).

Третье решение. Как и в первом решении, предположим, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеют корней. Тогда их дискриминанты отрицательны, то есть $(b+c+1)^2 < 4(bc+a)$ и $(c+a+1)^2 < 4(ca+b)$. Эти неравенства переписываются в виде $(b-c-1)^2 < 4a-4b$ и $(c-a+1)^2 < 4b-4a$. Значит, оба числа в правых частях положительны; однако их сумма равна нулю. Противоречие.

9.2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC. (*П. Кожевников*)

Решение. Пусть M — середина BC. Треугольник BPC равнобедренный ($BP = PC$ как отрезки касательных); значит, его медиана PM является высотой. Так как $\angle PMC = \angle PEC = 90°$, четырёхугольник $MCEP$ — вписанный; значит, $\angle MEP = \angle MCP$. Далее, CP — касательная к Ω, поэтому $\angle MCP = \angle BAC$. Получаем, что $\angle MEP = \angle BAC$. Значит, $\angle MEA + \angle BAC = (90° - \angle MEP) + \angle BAC = 90°$, откуда $ME \perp AB$ (см. рис. 3).

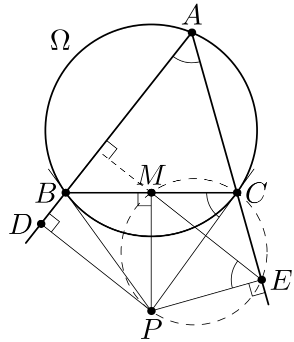

Рис. 3

Аналогично доказывается, что $MD \perp AC$. Это и значит, что M — точка пересечения высот треугольника ADE.

9.3. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$? (*С. Берлов*)

Ответ. 99.

Первое решение. Если положить $a_{100} = 1$ и $a_i = 2i$ при $i = 1, 2, \ldots, 99$, то $b_1 = b_{100} = 3$, так что среди чисел b_i будет не больше 99 различных. Осталось доказать, что среди чисел b_i всегда найдутся 99 различных чисел.

Без ограничения общности можно считать, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$. Пусть d_i — наибольший общий делитель всех 99 исходных чисел, кроме a_i; тогда $b_i = a_i + d_i$. Пусть d_k — наибольшее из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_{100}$. Тогда при $i \neq k$ числа a_i делятся на d_k. Следовательно, при $i < j$ и $i \neq k \neq j$ разность $a_j - a_i$ также делится на d_k. Поскольку она положительна, $a_j - a_i \geqslant d_k \geqslant d_i$. Поэтому

$$b_j > a_j \geqslant a_i + d_i = b_i,$$

откуда $b_i \neq b_j$. Итак, мы установили, что $b_j \neq b_i$ при $i \neq k \neq j$. Стало быть, все 99 чисел b_i при $i \neq k$ различны.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что среди чисел b_i хотя бы 99 различных. Мы снова будем пользоваться обозначением d_i из предыдущего решения; также мы будем считать, что $a_1 < \ldots < a_{100}$.

Обозначим $c_i = a_{i+1} - a_i$. Пусть c_ℓ — минимальное из чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{99}$. Покажем, что если $i < j$ и $i \neq \ell + 1 \neq j$, то числа b_i и b_j различны. Отсюда, опять же, будет следовать требуемое.

Предположим, что $i < j - 1$. Тогда $i \leqslant 98$, и числа a_{i+1} и a_{i+2} делятся на d_i. Значит, $d_i \leqslant a_{i+2} - a_{i+1} < a_j - a_i$, откуда

$$b_i = a_i + d_i < a_i + (a_j - a_i) = a_j < b_j.$$

Пусть теперь $j = i + 1$. Тогда $i \neq \ell + 1$ и $i \neq \ell$ (поскольку $j \neq \ell + 1$). Значит, числа a_ℓ и $a_{\ell+1}$ делятся на d_i. Отсюда $d_i \leqslant a_{\ell+1} - a_\ell = c_\ell \leqslant c_i$, что влечёт за собой

$$b_i = a_i + d_i \leqslant a_i + c_i = a_{i+1} = a_j < b_j.$$

Итак, в обоих случаях мы получили, что $b_i < b_j$, что и требовалось.

9.4. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных. Никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_n$, что на каждой из n прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной. (*фольклор*)

Решение. Докажем более сильный факт. Пусть A_0 — произвольная точка на одной из данных прямых, через которую не проходит ни одна из остальных прямых. Мы докажем, что существует требуемая ломаная, начинающаяся с A_0.

Индукция по n. Если $n = 1$, то ломаная (из одного отрезка) строится тривиально. Пусть $n \geqslant 2$, данные прямые — $\ell_1, \ldots, \ell_n$, и A_0 лежит на ℓ_n. Пусть A_1 — ближайшая к A_0 точка пересечения ℓ_n с остальными прямыми (если ближайших точек две, выберем любую из них); скажем, $A_1 = \ell_n \cap \ell_{n-1}$. По условию, через A_1 не проходит других данных прямых.

Выбросим из рассмотрения ℓ_n. По предположению индукции, существует несамопересекающаяся ломаная $A_1A_2\ldots A_n$, начинающаяся с A_1 и содержащая по одному звену на каждой из прямых $\ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$. Докажем, что $A_0A_1\ldots A_n$ — требуемая ломаная. Действительно, по одному её звену лежит на $\ell_1, \ldots, \ell_n$; осталось показать, что она несамопересекающаяся. Если это не так, то отрезок A_0A_1 пересекается с каким-то другим отрезком ломаной (отличным от A_1A_2), и, значит, на A_0A_1 есть точка пересечения с одной из прямых $\ell_1, \ldots, \ell_{n-2}$. Но это противоречит выбору точки A_1. Переход индукции доказан.