9 класс

Первый день

9.1. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b)=x-c$, $(x-b)(x-c)=x-a$, $(x-c)(x-a)=x-b$ имеют решение.

9.2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.

9.3. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?

9.4. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет параллельных. Никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что существует такая n-звенная несамопересекающаяся ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_n$, что на каждой из n прямых лежит ровно по одному звену этой ломаной.