11 класс

Задача 1. Свободные колебания линейки

Введение. Закрепим линейку на краю стола, используя зажим. Возбудим колебания, отклоняя линейку в поперечном направлении, и направим перпендикулярно плоскости колебания луч стробоскопа. Предположим, что конец линейки совершает гармонические колебания с частотой $\omega_л$, а стробоскоп мерцает с частотой $\omega_с$, то есть мы видим линейку только в моменты времени $t_n = n(2\pi/\omega_с)$. Координата конца линейки в моменты, когда мы её видим, $x_n = x_0 \cos(2\pi n(\omega_л/\omega_с) + \varphi_0)$. Линейка «замрёт», если частота колебания линейки будет кратна частоте стробоскопа, то есть

$$\omega_л = k\omega_с, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Причём чем ближе $\omega_л$ к частоте, кратной $\omega_с$, тем медленнее колеблется изображение линейки в свете стробоскопа. Уменьшая $\omega_с$ с заведомо большой частоты, мы увидим, как колебания изображения линейки замедляются и, подобрав такую $\omega_с$, при которой линейка «замрёт» в первый раз, найдём $\omega_л = \omega_с$.

1. Снимем зависимость $\nu(l)$:

l, мм	ν, об/мин	l, мм	ν, об/мин	l, мм	ν, об/мин
70	8650	150	2060	230	910
80	6850	160	1850	240	850
90	5550	170	1720	250	770
100	4470	180	1450	260	720
110	3700	190	1300	270	660
120	3140	200	1170	280	620
130	2740	210	1050	290	580
140	2350	220	980	300	540

2. Построим график зависимости $\ln\omega(\ln l)$, из углового коэффициента $k \approx -2$ найдём что $p = -2$.

3. От ширины линейки частота колебаний не зависит, то есть $q = 0$. Тогда, решая методом размерностей $\omega = \beta E^m \rho^n l^p h^s$, получим: $m = 1/2$, $n = -1/2$, $s = 1$.

4. Теперь, когда мы знаем вид зависимости частоты от остальных параметров, можно найти модуль Юнга материала пластмассовой линейки. Для этого нам нужно знать отношение плотностей стали и пластмассы, которое можно найти, зная геометрические размеры и отношение масс линеек. Последнее находится с помощью уравновешивания линеек на краю стола и правила моментов (рис. 12). Положение центра масс металлической линейки находится на расстоянии 164 мм от ее края. Положение опоры (края стола) при уравновешивании линеек находится на расстоянии 126 мм. Таким образом, $m_{ст}/m_{пл} = 63/19$. Геометрические размеры линеек, измеренные другой линейкой: $l_{ст} = 330$ мм, $l_{пл} = 313$ мм, $b_{ст} = 30$ мм, $b_{пл} = 25$ мм.

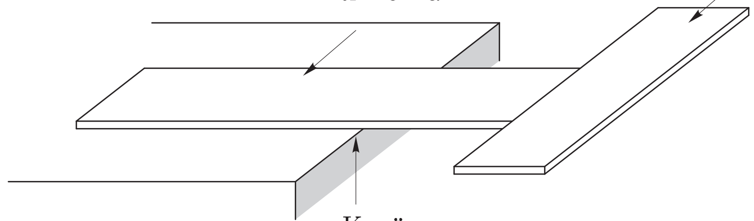

Рис. 12

Измерив частоту колебаний при длине свободной части пластмассовой линейки, например, 160 мм, получаем значение 1130 мин$^{-1}$. В итоге получаем:

$$E_{пл} = E_{ст} \cdot \left(\frac{\omega_{пл}(l_0)}{\omega_{ст}(l_0)}\right)^2 \left(\frac{h_{ст}}{h_{пл}}\right)^2 \frac{m_{пл} \cdot l_{ст} \cdot h_{ст} \cdot b_{ст}}{m_{ст} \cdot l_{пл} \cdot h_{пл} \cdot b_{пл}} = $$
$$= 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{1130}{1850}\right)^2 \left(\frac{1}{2{,}1}\right)^2 \frac{19 \cdot 330 \cdot 1 \cdot 30}{63 \cdot 313 \cdot 2{,}1 \cdot 25} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Более точным решением может быть снятие зависимости $\omega(l)$ для пластмассовой линейки, построение двух графиков $\omega(1/l^2)$ и вычисление отношения двух угловых коэффициентов, откуда аналогичным образом вычисляется $E_{пл}$. Для оценки погрешности модуля Юнга считаем, что $\Delta\omega = 10$ мин$^{-1}$, погрешность измерения любой длины линейкой $\Delta l = 1$ мм, такое же значение имеет погрешность определения положения опоры при измерениях, необходимых для определения отношения масс линеек. Из вышесказанного следует, что основной вклад в погрешность внесут измерения: 1) ширины линеек ($\approx 4\%$), 2) разности положений опор ($\approx 3\%$), а также указанная в условии погрешность определения толщины ($\approx 20\%$, т.к. в окончательный ответ толщина входит в третьей степени). Окончательно погрешность результата $\approx 30\%$.

Задача 2. Разряд батарейки

1. Подключим амперметр в режиме вольтметра к батарейке и найдём её начальную ЭДС $\mathscr{E}_0 = 1{,}62 \pm 0{,}01$ В. Затем измерим напряжение на выданном резисторе, ненадолго подключив его к батарейке $U_0 = 1{,}40 \pm 0{,}01$. Таким образом, зная сопротивления резистора $r = 1{,}0$ Ом можно вычислить $I_{0,кз}$ и R_0:

$$R_0 = \frac{\mathscr{E}_0 - U_0}{U_0} r = 0{,}16 \text{ Ом}, \qquad I_{0,кз} = \frac{\mathscr{E}_0}{R_0} = \frac{\mathscr{E}_0 U_0}{(\mathscr{E}_0 - U_0) r} = 10 \text{ А}.$$

Оценим погрешности:

$$\left(\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\Delta(\mathscr{E}_0 - U_0)}{\mathscr{E}_0 - U_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 = 0{,}09^2 + 0{,}05^2, \qquad \left(\frac{\Delta I_0}{I_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)^2$$

$$R_0 = 0{,}16 \pm 0{,}02 \text{ Ом},, \qquad I = 10 \pm 1 \text{ А}.$$

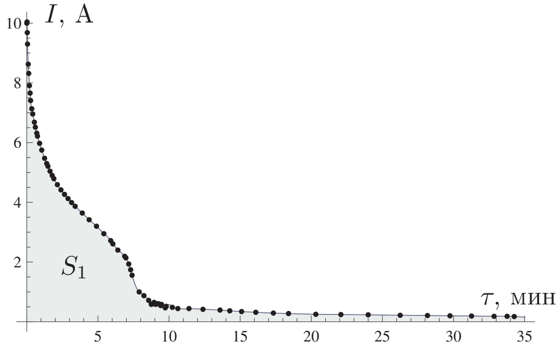

Рис. 13

2. Поскольку в условии спрашивалось минимальное постоянное сопротивление, а таким сопротивлением обладает амперметр на пределе «10A», то разряжать батарейку нужно через него. Положим батарейку в калориметр, нальём небольшое количество воды $V = 20$ мл, чтобы залить батарейку полностью. Опустим также в воду термопару, чтобы следить за изменением температуры. Наконец, запустим секундомер, замкнём батарейку на амперметр и будем следить, за показаниями трёх приборов, включая мультиметр с термопарой.

Полученные значения $I(\tau)$ и $t(\tau)$ занесём в таблицу и построим на графиках (рис. 13 и 14). Здесь и далее τ — время, а t — температура в °C. Батарейка разряжается достаточно долго: будем записывать измерения в течение 20–30 мин. Также заметим, что в начале имеет смысл записывать показания тока как можно чаще, а примерно через 10 мин достаточно одного измерения в минуту.

Так как $I = dq/d\tau$, то протёкший заряд q_1 будет равен площади под графиком $I(\tau)$:

$$q_1 = S_1 = 1{,}00 \text{ А} \cdot \text{ч}.$$

Поскольку в конце измерений ток уменьшается слабо, но при этом не является нулевым, то требуется оценить оставшееся время τ', необходимое для полной разрядки батарейки и заряд q', который при этом выделится. Для этого заметим, что в течение последних 20 мин ток спадал линейно, поэтому линейная аппроксимация даст нам хорошую оценку этих величин.

$$\tau' = \frac{I'}{k} = \frac{0{,}24 \text{ А}}{0{,}39 \text{ А/ч}} \approx 0{,}6 \text{ часа}, \qquad q' = \frac{1}{2}\tau' I' = 0{,}07 \text{ А} \cdot \text{ч}.$$

Таким образом, малость этой величины по сравнению с q_1 позволяет нам действительно обрывать измерения на 30 минутах. Погрешность определения q_1 найдём из графика. Первые $\tau_1 \approx 10$ мин ток менялся быстро, поэтому ошибка определния тока составляла порядка $\Delta I_1 = 0{,}05$ А. Затем, когда показания амперметра менялись не так резко, погрешность определения тока $\Delta I_2 = 0{,}01$ А.

Также у нас есть погрешность определния площади под графиком. Другими словами:

$$\Delta q_1 = \Delta q = \Delta I_1 \tau_1 + \Delta I_2(\tau_\Sigma - \tau_1) + \Delta S_1 \approx 0{,}05 \text{ А} \cdot \text{ч}.$$

Окончательно:

$$q = q_1 + q' = 1{,}07 \pm 0{,}05 \text{ А} \cdot \text{ч}.$$

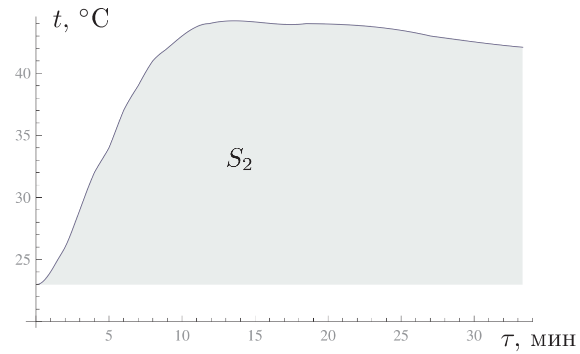

Рис. 14

3. Теплоёмкость всей системы:

$$C_0 = C + c_{\text{в}}\rho V = 145 \pm 4 \text{ Дж},$$

Поэтому, когда система нагрелась к концу эксперимента на $\Delta t_1 = 20 \pm 2\,$°C, то запасённое тепло по сравнению с начальным состоянием:

$$Q_{\text{з}} = C_0 \Delta t_1 = 2{,}9 \pm 0{,}3 \text{ кДж}.$$

Построим график температуры от времени. Из графика видно, что сначала температура увеличивалась, а потом вышла на плато: тепловые потери сравнялись с выделяемой на батарейке мощности. Оценим тепловые потери из закона:

$$P = \alpha(t - t_0),$$

где P — мощность тепловых потерь, t — температура воды в калориметре, $t_{\text{к}}$ — комнатная температура, α — коэффициент теплопотерь, который в течение одного эксперимента можно считать постоянным. Поскольку $P = dQ/d\tau$, то тепловые потери $Q_{\text{п}}$:

$$Q_{\text{п}} = \int P d\tau = \alpha \int (t - t_{\text{к}}) d\tau.$$

Последний интеграл есть не что иное, как площадь S_2 между графиком нагрева и прямой соотвествующей комнатной температуре.

Чтобы определить коэффициент α, разомкнём цепь и измерим кривую остывания $t_{\text{ост}}(\tau)$. Так как $t_{\text{ост}} = t_{\text{к}} + (t_0 - t_{\text{к}})e^{-\alpha t/C_0}$, то построив график $\ln(t_{\text{ост}} - t_{\text{к}})$ от времени определим угловой коэффициент и вычислим $\alpha = 0{,}04 \pm 0{,}01$ Вт/°C.

Полное тепло, выделившееся в батарейке найдём как сумму:

$$Q_0 = Q_{\text{з}} + Q_{\text{п}} = 4{,}1 \pm 0{,}7 \text{ кДж}.$$

4. Поскольку сопротивлением амперметра при разрядке можно пренебречь, то практически вся работа батарейки A переходит в джоулево тепло Q_1:

$$Q_1 = A = \mathscr{E}_{\text{ср}} q = 1{,}07 \text{Вт} \cdot \text{ч} = 3{,}8 \pm 0{,}5 \text{ кДж}.$$

Видно, что в пределах погрешности $Q_1 = Q_0$.