9 класс

9.1. На некоторые клетки квадратной доски 4×4 выкладывают стопкой золотые монеты, а на остальные клетки — серебряные. Можно ли положить монеты так, чтобы в каждом квадрате 3×3 серебряных монет было больше, чем золотых, а на всей доске золотых было больше, чем серебряных?

Ответ: да, можно.

Например, положим, на одну из клеток центрального квадрата 2×2 стопку из девяти серебряных монет, а на остальные клетки доски — по одной золотой монете. Тогда в каждом квадрате 3×3 будет 9 серебряных монет и 8 золотых, а на всей доске — 15 золотых и 9 серебряных.

Существует и много других примеров.

$+$ *приведен верный пример (в том числе, и без пояснений)*

$\pm$ *наряду с верным примером приведен и неверный*

$-$ *приведен только ответ без примера*

9.2. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

Ответ: 500 рублей.

Первый способ. Пусть килограмм соли стоит в Твери x рублей, а в Москве — y рублей, и купец в первый раз купил a кг соли. Тогда, по условию, $a(y - x) = 100$.

Вырученная сумма составила ay рублей, значит, во второй раз купец смог купить $\frac{ay}{x}$ кг соли. В этом случае прибыль составила $\frac{ay}{x} \cdot y - ay = \frac{ay(y-x)}{x}$ рублей. По условию, $\frac{ay(y-x)}{x} = 120$.

Из двух полученных уравнений следует, что $\frac{100y}{x} = 120$, то есть $y = \frac{6}{5}x$. Подставляя этот результат в первое уравнение, получим, что $ax = 500$.

Второй способ. Пусть купец заплатил при первой покупке в Твери за соль x рублей. Тогда он продал ее в Москве за $x + 100$ рублей. Во второй раз он потратил в Твери $x + 100$ рублей, а выручил в Москве $x + 100 + 120 = x + 220$ рублей. Так как соотношение московских и тверских цен не изменилось, составим пропорцию: $\frac{x}{x+100} = \frac{x+100}{x+220}$. Решив уравнение, получим $x = 500$.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *верное решение с небольшими пробелами или отдельными невнятными местами*

$\mp$ *верный ответ получен, исходя из рассуждений с конкретными числовыми данными*

$\mp$ *приведен верный ответ и проверено только, что он удовлетворяет условию*

$-$ *приведен только ответ или ответ с малопонятными выкладками без пояснений*

Если ученик предполагает, что всякий раз покупалось целое количество одинаковых мешков и рассматривает цены одного мешка, то оценка не снижается.

9.3. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC в два раза больше стороны AB. На стороне BC выбрана точка K так, что $\angle KDB = \angle BDA$. Найдите отношение $BK : KC$.

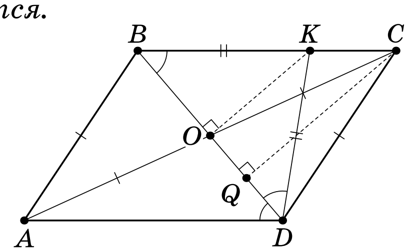

Рис. 9.3

Ответ: 2 : 1.

Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Из условия задачи следует, что $AB = AO = OC = CD$ (см. рис. 9.3). Так как $\angle KDB = \angle BDA = \angle DBK$, то $BK = KD$, поэтому медиана KO треугольника BKD является его высотой. Так как $OC = CD$, то медиана CQ треугольника OCD также является его высотой. Таким образом, $CQ || KO$, тогда, по теореме о пропорциональных отрезках (*или из подобия треугольников BOK и BQC*) получим, что $BK : KC = BO : OQ = 2 : 1$.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что треугольники BKD и OCD — равнобедренные*

$-$ *рассмотрен какой-либо частный случай или приведен только ответ*

9.4. Под ёлкой лежат 2012 шишек. Винни-Пух и ослик Иа-Иа играют в игру: по очереди берут себе шишки. Своим ходом Винни-Пух берёт 1 или 4 шишки, а Иа-Иа — 1 или 3. Первым ходит Пух. Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

Ответ: Винни-Пух.

Первым ходом Винни должен взять 4 шишки, а в дальнейшем, после любого хода Иа-Иа брать каждый раз одну шишку. В этом случае, после каждого хода ослика под ёлкой будет оставаться нечетное количество шишек. Так как количество шишек под елкой постепенно будет уменьшаться, то неизбежно настанет момент, когда под елкой останется одна шишка. Взяв ее, Пух выиграет.

Существуют и другие стратегии.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный ответ и указана верная стратегия игры, но не объяснено, почему эта стратегия приводит к успеху*

$-$ *приведен верный ответ и сказано про четность, но стратегия игры отсутствует*

$-$ *приведен только ответ*

9.5. Могут ли все корни уравнений $x^2 - px + q = 0$ и $x^2 - (p+1)x + q = 0$ оказаться целыми числами, если: а) $q > 0$; б) $q < 0$?

Ответ: а) да; б) нет.

а) Например, $x^2 - 7x + 12 = 0$ и $x^2 - 8x + 12 = 0$. Корни первого уравнения 3 и 4, а второго 2 и 6.

Существуют и другие примеры.

б) Пусть $q < 0$, тогда каждое из данных уравнений имеет корни разных знаков. Пусть $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$ — корни первого уравнения, а $x_3 > 0$ и $x_4 < 0$ — корни второго.

По теореме Виета, $x_1x_2 = q$ и $x_3x_4 = q$, значит $x_1(-x_2) = x_3(-x_4) = -q > 0$. Кроме того, $x_1 \neq x_3$, иначе $x_2 = x_4$, а одинаковые наборы корней данные уравнения иметь не могут.

Пусть $x_1 < x_3$, тогда $-x_2 > -x_4$, то есть $x_2 < x_4$ (случай, когда $x_1 > x_3$ и $x_2 > x_4$ рассматривается аналогично). Так как все корни — целые числа, то $x_3 - x_1 \geqslant 1$ и $x_4 - x_2 \geqslant 1$. Используя опять теорему Виета, получим, что $x_1 + x_2 = p$ и $x_3 + x_4 = p + 1$. Тогда $(p+1) - p = (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = (x_3 - x_1) + (x_4 - x_2) \geqslant 2$. Вместе с тем, $(p+1) - p = 1$.

Полученное противоречие показывает, что при $q < 0$ условие задачи выполняться не может.

$+$ *полное обоснованное решение обоих пунктов*

$\pm$ *приведено полное решение пункта б), а пункт а) отсутствует или выполнен неверно*

$\pm$ *приведено в целом верное рассуждение в пункте б), в котором есть незначительные пробелы и приведен верный пример в пункте а)*

$\mp$ *приведено в целом верное рассуждение в пункте б), в котором есть незначительные пробелы, а пункт а) отсутствует или выполнен неверно*

$\mp$ *верно выполнен только пункт а)*

9.6. Через концы основания BC трапеции $ABCD$ провели окружность, которая пересекла боковые стороны AB и CD трапеции в точках M и N соответственно. Известно, что точка T пересечения отрезков AN и DM также лежит на этой окружности. Докажите, что $TB = TC$.

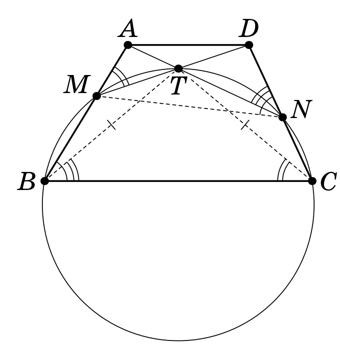

Рис. 9.5

Так как четырёхугольник $MBCN$ — вписанный, то $\angle MBC = \angle MND$ (см. рис. 9.6). Поскольку $ABCD$ — трапеция, то $\angle MBC + \angle MAD = 180^\circ$. Следовательно, $\angle MND + \angle MAD = 180^\circ$, поэтому четырехугольник $MADN$ — также вписанный, значит, $\angle TND = \angle TMA$. Кроме того, вписанными являются четырехугольники $TBCN$ и $TCBM$, значит, $\angle TBC = \angle TND$ и $\angle TCB = \angle TMA$. Таким образом, $\angle TBC = \angle TCB$, откуда $TB = TC$, что и требовалось.

$+$ *полное обоснованное решение*

$\mp$ *доказано только, что $MADN$ — вписанный*