10 класс

10.1. Даны натуральные числа M и N, большие десяти, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N? Найдите все возможные ответы. (*Н. Агаханов*)

Ответ. Цифрой 6.

Решение. По условию, $M = 3N$, значит, число $A = M - N = 2N$ чётно. Но, по условию, число A составлено из нечетных цифр и двойки. Значит, A оканчивается на 2. Поэтому вдвое меньшее число N оканчивается либо на 1, либо на 6.

Покажем, что N не может оканчиваться на 1. Если N оканчивается на 1, то при его удвоении не происходит переноса десятка из последнего в предпоследний разряд. Значит, предпоследняя цифра числа $A = 2N$ будет чётной, а она должна быть нечётной. Противоречие.

Замечание. Пары чисел N и M, о которых идет речь в условии, существуют, например, $N = 16$, $M = 48$. Более того, таких пар бесконечно много. Все подходящие числа N описываются так: первая цифра — 1 или 2, далее несколько (возможно, ноль) цифр, каждая из которых равна 5 или 6, и последняя цифра 6.

Комментарий. Верный ответ и пример числа N с цифрой 6 на последнем месте — 1 балл.

Установлено, что последняя цифра числа M на 2 больше последней цифры числа N — 1 балл.

Показано, что последняя цифра числа N может быть только единицей или шестёркой — 2 балла.

Баллы за различные продвижения складываются.

Заметим, что в задаче не требуется приведение примера такого числа. Достаточно доказать, что никакая цифра, кроме 6, последней оказаться не может.

10.2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Так как $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90^\circ$, точки A, C_1, A_1 и C лежат на окружности с диаметром AC, значит, $\angle BA_1C_1 = 180^\circ - \angle CA_1C_1 = \angle BAC$ (см. рис. 2). Тогда $\angle BA_1C_1 = \angle BA_1C' = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC'} + \overset{\frown}{CA'})$ как угол между хордами. С другой стороны, $\angle BAC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA'} + \overset{\frown}{CA'})$ как вписанный угол; значит, дуги BA' и BC' равны. Поэтому и отрезки BA' и BC' равны. Наконец, отрезки касательных $B'A'$ и $B'C'$ также равны, и значит, точки B' и B лежат на серединном перпендикуляре к хорде $A'C'$ окружности Ω. Центр окружности Ω также лежит на этом серединном перпендикуляре.

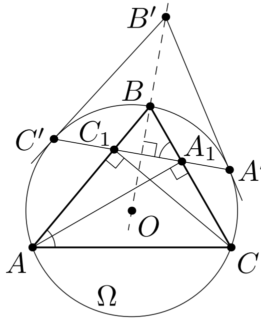

Рис. 2

Комментарий. Доказано равенство дуг или отрезков BA' и BC' (или эквивалентное утверждение, например, $OB \perp A'C'$) — 4 балла.

Замечено, что OB' — серединный перпендикуляр к отрезку $A'C'$ — 1 балл.

Замечено, что OB' — серединный перпендикуляр к отрезку $A'C'$, и что для решения задачи достаточно доказать равенство дуг или отрезков BA' и BC' (при этом равенство указанных дуг или отрезков не доказано) — 2 балла.

10.3. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трёхчлена $R(x)$ в многочлен $P(x)+Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x) + R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x) + R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трёхчлена $P(x)$, сумма корней трёхчлена $Q(x)$ и сумма корней трёхчлена $R(x)$ равны между собой. (*Н. Агаханов*)

Первое решение. Пусть a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 — соответственно пары корней трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$. Рассмотрим трёхчлен $S(x) = P(x) + Q(x) + R(x)$. Его значения в точках c_1 и c_2 совпадают со значениями в этих же точках трёхчлена $P(x) + Q(x)$, так как $R(c_1) = R(c_2) = 0$. Значит, из условия следует, что $S(c_1) = S(c_2)$. Аналогично, $S(a_1) = S(a_2)$ и $S(b_1) = S(b_2)$. Но квадратичная функция принимает равные значения в разных точках только тогда, когда эти точки симметричны относительно абсциссы вершины изображающей её параболы. Значит, пары точек a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 симметричны относительно одной и той же точки — абсциссы $x = d$ вершины параболы $y = S(x)$. Это и означает, что $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 2d$.

Второе решение. Пусть $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ — соответственно пары корней трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$. Обозначим через $a = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $b = \frac{b_1 + b_2}{2}$ и $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$ абсциссы вершин парабол — графиков функций $y = P(x)$, $y = Q(x)$, $y = R(x)$. Следующая лемма очевидно вытекает из свойств квадратичной функции.

Лемма. *Пусть f — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, $x = k$ — абсцисса вершины параболы $y = f(x)$, и числа $k_1 < k_2$ таковы, что $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ (иначе говоря, точки k_1 и k_2 симметричны относительно точки k). Тогда для всех $x \in [k_1, k_2)$ выполнено неравенство $f(k_2) \geqslant f(x)$, причем равенство достигается только при $x = k_1$.*

Пусть теперь для определенности c — наибольшее из чисел a, b, c, то есть $c \geqslant a$, $c \geqslant b$. Пусть точка c_1' симметрична c_2 относительно a, то есть $c_1' = 2a - c_2 = 2a - (2c - c_1) = c_1 - 2(c - a)$. Тогда $c_1' \leqslant c_1 < c_2$. Согласно лемме, $P(c_2) \geqslant P(c_1)$, причем неравенство обращается в равенство только в случае $c_1' = c_1$, то есть при $a = c$.

Аналогично доказываем, что $Q(c_2) \geqslant Q(c_1)$, причем неравенство обращается в равенство только при $b = c$. Значит,

$P(c_2)+Q(c_2)\geqslant P(c_1)+Q(c_1)$, причем равенство достигается только в случае $a=b=c$. Отсюда следует утверждение задачи.

Замечание. Условие положительности старших коэффициентов многочленов $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ существенно, так как иначе суммы $P(x)+Q(x)$, $P(x)+Q(x)+R(x)$ и т.п. могли оказаться линейными или постоянными функциями.

Комментарий. Рассмотрена сумма $S(x)=P(x)+Q(x)+$ $+R(x)$ и показано, что значения $S(x)$ в корнях любого из данных трёхчленов одинаковы — 4 балла.

10.4. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k+2013$? (*Р. Женодаров*)

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что искомое разбиение существует. Назовём множество A_k *большим*, если оно содержит больше одного элемента. Докажем, что для любого n найдутся n больших множеств, индукцией по n. При $n=1$ рассмотрим множество A_{k_1}, содержащее единицу; сумма чисел в нём равна $k_1+2013>1$, значит, оно содержит ещё хотя бы одно число, то есть оно большое. Для доказательства индукционного перехода предположим, что мы уже нашли большие множества $A_{k_1},\ldots,A_{k_n}$, где $k_1<\ldots<k_n$. Тогда число k_n+2013 не лежит в множестве A_{k_n} (в противном случае это множество не было бы большим). Значит, это число лежит в каком-то другом множестве $A_{k_{n+1}}$, сумма чисел в котором равна $k_{n+1}+2013>k_n+2013$; поэтому оно также большое, и $k_{n+1}>k_n$.

Пусть $k_1<k_2<\ldots<k_{2014}$ — номера некоторых 2014 больших множеств. Рассмотрим множества $A_1, A_2, \ldots, A_{k_{2014}}$. В их объединении содержится не менее $k_{2014}+2014$ различных чисел, а значит, среди них есть число $d\geqslant k_{2014}+2014$. Но это число d не может входить ни в одно из множеств $A_{k_1},\ldots,A_{k_{2014}}$, ибо сумма в каждом из них меньше d. Противоречие.

Второе решение. Мы будем пользоваться определением большого множества из первого решения.

Докажем сначала, что имеется бесконечно много больших множеств. Предположим противное, тогда найдется такой номер t (считаем $t > 1$), что каждое из множеств $A_t, A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots$ состоит из одного элемента. Итак, объединение множеств $A_t, A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots$ есть множество $\{t + 2013, t + +2014, \ldots\}$. Тогда объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{t-1}$ совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, t+2012\}$. Но сумма элементов в этих множествах должна быть равна $2014+2015+\ldots+(t+2012)$, что меньше, чем сумма всех чисел в множестве $\{1, 2, \ldots, t + 2012\}$. Противоречие показывает, что наше утверждение верно.

Сумма чисел каждого из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ не превосходит $N + 2013$, значит все множества $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, N + 2013\}$. Так как имеется бесконечно много больших множеств, то зафиксируем такой номер N, что среди множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ хотя бы 2014 больших. Тогда объединение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, A_N$ содержит не менее $N + 2014$ элементов (они попарно не пересекаются) — противоречие.

Комментарий. В предположении, что нужное разбиение существует, доказано, что множеств, состоящих из двух или более элементов, бесконечное число — 3 балла.

Задача решена в предположении, что в искомом разбиении бесконечное число больших множеств (но эта бесконечность в работе не доказана) — 3 балла.