11 класс

11.5. Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго — 5, третьего — 9, и так далее (длина k-го прыжка равна 2^k+1). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в любой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше, чем по разу)? (*С. Берлов*)

Ответ. Да.

Решение. Покажем, как блоха может прыгать, попадая последовательно в точки 0, 1, 2, 3, … (каждый раз — за несколько прыжков). Для этого достаточно показать, как, попав в точку n, за несколько прыжков попасть в точку $n+1$.

Пусть до попадания в точку n блоха совершила $k-1$ прыжков (т. е. длина следующего прыжок будет равна 2^k+1). Тогда она может сделать $\ell = 2^k$ прыжков влево, а затем один прыжок вправо. В результате она сместится вправо на

$$(2^{k+\ell}+1)-(2^k+1)-(2^{k+1}+1)-\ldots-(2^{k+\ell-1}+1) =$$
$$= (2^{k+\ell}-2^k-2^{k+1}-\ldots-2^{k+\ell-1})+1-2^k = 2^k+1-2^k = 1,$$

что и требовалось.

11.6. Действительные числа a, b, c, d, по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc+abd+acd+bcd+a+b+c+d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1} > 0.$$

(*К. Иванов*)

Решение. Обозначим $x = \frac{a+1}{a-1}$, $y = \frac{b+1}{b-1}$, $z = \frac{c+1}{c-1}$, $t = \frac{d+1}{d-1}$. Поскольку модули чисел a, b, c, d больше единицы, числа x, y, z, t положительны (и не равны 1).

Данное соотношение переписывается в виде

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1),$$

или $xyzt = 1$. Из равенства $\frac{1}{a-1} = \frac{x-1}{2}$ и аналогичных получаем, что

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}=\frac{x+y+z+t-4}{2}.$$

Таким образом, нам надо доказать, что $x+y+z+t>4$.

Поскольку $xyzt=1$, но числа x, y, z, t отличны от единицы, среди них есть различные. Тогда по неравенству о средних получаем

$$x+y+z+t>4\sqrt[4]{xyzt}=4,$$

что и требовалось.

11.7. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω. (*М. Кунгожин*)

Первое решение. Пусть, без ограничения общности, точка D лежит на луче BA. Пусть биссектрисы AI и BI углов треугольника пересекают ω вторично в точках A' и B' соответственно. Пусть, наконец, L — середина дуги ACB (см. рис. 4).

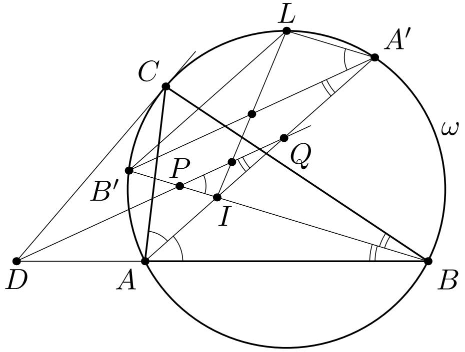

Рис. 4

Заметим, что $\angle LA'A=\angle LBA=(\angle A+\angle B)/2=\angle B'IA$. Значит, $LA'\parallel IB'$ и, аналогично, $LB'\parallel IA'$. Поэтому $IA'LB'$ — параллелограмм, и прямая LI делит $A'B'$ пополам.

Далее, $\angle CDB=\angle CAB-\angle ACD=\angle A-\angle B$. Значит, $\angle PQA=\angle QAB-\angle QDB=\angle A/2-(\angle A-\angle B)/2=\angle B/2=$ $=\angle B'A'A$, так что $PQ\parallel A'B'$. Но тогда прямая LI, делящая отрезок $A'B'$ пополам, делит пополам и отрезок PQ, что и требовалось доказать.

Второе решение. Как и в предыдущем решении, обозначим через L середину дуги ACB и покажем, что $\angle PQA = \angle B/2 = \angle PBA$. Это значит, что точки Q, P, A и B лежат на одной окружности. А значит, прямые PQ и AB антипараллельны друг другу относительно прямых PI и QI. Поэтому, чтобы доказать, что LI — медиана треугольника PIQ, достаточно доказать, что LI — симедиана треугольника AIB.

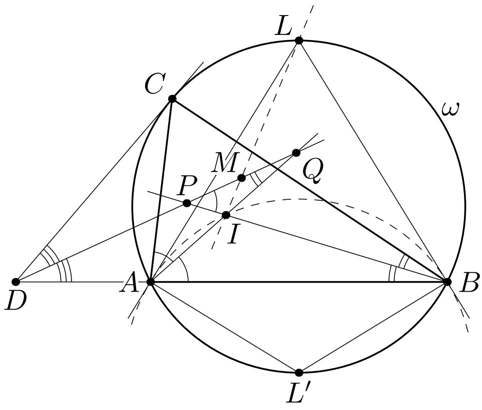

Рис. 5

Пусть L' — точка окружности ω, диаметрально противоположная точке L. Тогда по лемме о трезубце L' — центр окружности, описанной около треугольника AIB. При этом $\angle L'AL = \angle L'BL = 90°$. Значит, LA и LB — касательные к окружности, описанной около треугольника AIB. Значит, по теореме о симедиане LI — симедиана треугольника ABI.

11.8. Даны натуральные числа a и b, причём $a < b < 2a$. На клетчатой плоскости отмечены некоторые клетки так, что в каждом клетчатом прямоугольнике $a \times b$ или $b \times a$ есть хотя бы одна отмеченная клетка. При каком наибольшем α можно утверждать, что для любого натурального N найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, в котором отмечено хотя бы αN^2 клеток?

(*И. Богданов, О. Подлипский*)

Ответ. $\alpha = 1/(2a^2 - 2ab + b^2)$.

Решение. Введём на плоскости систему координат так, чтобы центры клеток, и только они, имели целые координаты. Будем говорить, что клетка имеет те же координаты, что и её центр. Назовём прямоугольник $a \times b$ *вертикальным* или *горизонтальным*, если его сторона длины b вертикальна или горизонтальна, соответственно.

1. Положим $D = a^2 + (b-a)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2$. Отметим на плоскости клетку $(0,0)$ и все клетки, полученные из неё сдвигами на целые кратные векторов $(a, b-a)$ и $(b-a, -a)$; на рис. 6 приведён пример такой разметки при $a = 3$, $b = 5$. Центры этих клеток находятся в вершинах квадратной сетки со стороной $\sqrt{D}$; при этом клетки $(D,0) = (a^2+(b-a)^2, (b-a)a-a(b-a))$ и $(0,D)$ отмечены. Значит, при горизонтальном или вертикальном сдвиге на D отмеченная клетка переходит в отмеченную. Отсюда нетрудно получить, что в любом квадрате $D \times D$ ровно D отмеченных клеток.

Покажем, что такая разметка удовлетворяет условию; отсюда будет следовать, что $\alpha \leqslant D/D^2 = 1/D$. Действительно, рассмотрим любую полосу из b последовательных горизонталей. Ясно, что в ней есть хотя бы одна отмеченная клетка. Далее, если (x, y) — координаты любой отмеченной клетки в ней, то одна из двух клеток $(x+a, y+(b-a))$ или $(x+(b-a), y-a)$ также находится в этой полосе, и смещена относительно предыдущей не более, чем на a вправо. Значит, в любых a вертикалях нашей полосы найдётся отмеченная клетка. Доказательство для горизонтальных прямоугольников аналогично.

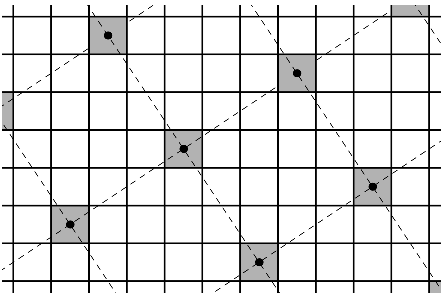

Рис. 6

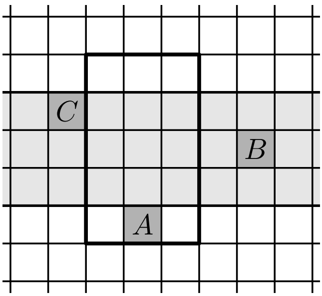

Рис. 7

2. Осталось показать, что $\alpha = 1/D$ подходит. Рассмотрим произвольную разметку, удовлетворяющую условию. Каж-

дому вертикальному прямоугольнику сопоставим любую из самых верхних отмеченных в нём клеток. Оценим, какому количеству прямоугольников может быть сопоставлена одна отмеченная клетка A; пусть её координаты $(0, 0)$. Её содержат ab вертикальных прямоугольников.

Рассмотрим горизонтальную полосу из клеток, ординаты которых не меньше 1 и не больше a. Пусть B — отмеченная клетка в этой полосе с наименьшей неотрицательной абсциссой, а C — отмеченная клетка в этой полосе с наибольшей отрицательной абсциссой. Тогда между B и C расположено не более $b-1$ вертикалей, в противном случае в нашей полосе между этими клетками нашёлся бы горизонтальный прямоугольник без отмеченных клеток.

Рассмотрим теперь все $a \cdot (b-a)$ вертикальных прямоугольников, содержащих A и пересекающих хотя бы a горизонталей сверху от A. Каждый из них содержит B или C, за исключением тех, которые расположены строго между B и C; таковых по доказанному выше не более $(b-a)\cdot(b-a)$. Значит, хотя бы $a(b-a)-(b-a)^2 = (2a-b)(b-a)$ прямоугольников, содержащих A, содержат также B или C, и A им не сопоставлена. Итого, клетка A сопоставлена не более, чем $ab-(2a-b)(b-a) = D$ вертикальным прямоугольникам.

Пусть теперь N — произвольное число. Положим $K = (a+b)N^2$ и рассмотрим произвольный квадрат $K \times K$; пусть в нём s отмеченных клеток. В этом квадрате расположено не меньше $(K-a)(K-b)$ вертикальных прямоугольников; каждому из них сопоставлена одна из s отмеченных клеток. По доказанному, получаем

$$s \geqslant \frac{(K-a)(K-b)}{D} > \frac{K(K-a-b)}{D} = \frac{(a+b)^2N^2(N^2-1)}{D}.$$

Разделив наш квадрат $K \times K$ на $(a+b)^2N^2$ квадратов размера $N \times N$, получаем, что в одном из них больше, чем $\frac{N^2-1}{D}$ отмеченных клеток; значит, их не меньше, чем $\frac{N^2-1}{D}+\frac{1}{D}=\frac{N^2}{D}$, что и требовалось доказать.