Условия и решения задач

9 класс

9.1. Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов x^2+ax+b и x^2+bx+a имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

(*С. Берлов*)

Ответ. 0.

Решение. Из условия следует, что трёхчлены x^2+ax+b и x^2+bx+a имеют общий корень x_0, а также отличные от него корни x_1 и x_2 соответственно; в частности, $a \neq b$. Тогда $0 = (x_0^2+ax_0+b)-(x_0^2+bx_0+a) = (a-b)(x_0-1)$, то есть $x_0 = 1$. Подставляя этот корень в любой трёхчлен, получаем $0 = 1+a+b$, то есть $b = -a-1$. Итак, наши трёхчлены имеют вид $x^2+ax-(a+1) = (x-1)(x+a+1)$ и $x^2-(a+1)x+a = (x-1)(x-a)$. Их корнями являются числа 1, a и $-(a+1)$ (при $a \neq 1, -2, -1/2$ они различны), сумма которых равна нулю.

Замечание. После получения равенства $0 = 1+a+b$ можно завершить решение по-другому. По теореме Виета имеем $x_0+x_1 = -a$, $x_0+x_2 = -b$, откуда $x_0+x_1+x_2 = -a-b-x_0 = 0$.

9.2. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC.

(*А. Якубов*)

Ответ. 60°.

Решение. Пусть ℓ — биссектриса угла EDF. Поскольку DE и DF — касательные к ω, прямая ℓ проходит через центр O окружности ω.

Совершим симметрию относительно ℓ. Так как $\angle EDA = \angle FDC$, луч DC перейдёт в луч DA. Поскольку ℓ проходит через O, окружность ω перейдет в себя; значит, точка C переходит в точку C', лежащую на DA и на ω. При этом, так как $AD \neq DC$, точки C' и A различны (см. рис. 1).

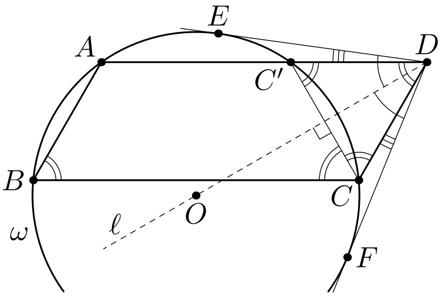

Рис. 1

Из той же симметрии имеем $\angle DCC' = \angle DC'C$. Так как точки A, B, C и C' лежат на ω, имеем $\angle DC'C = \angle ABC = \angle ADC$. Итак, все три угла треугольника DCC' равны, откуда $\angle ABC = \angle CDC' = 60^\circ$.

9.3. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x? (*В. Сендеров*)

Ответ. 2.

Первое решение. Перепишем условие задачи в виде $y^2 = a^2x^2 - a^2 + 1$. Заметим, что $y < ax$, поскольку правая часть равенства меньше $(ax)^2$. Но y и ax — целые числа, поэтому $y \leqslant ax - 1$. Следовательно,

$$a^2x^2 - a^2 + 1 = y^2 \leqslant (ax - 1)^2 = a^2x^2 - 2ax + 1.$$

Стало быть, $2ax \leqslant a^2$, то есть $a/x \geqslant 2$.

Оценка достигается при любом $x > 100$, если положить $a = 2x$, $y = ax - 1 = 2x^2 - 1$.

Второе решение. Приведём другое доказательство оценки $a/x \geqslant 2$. Перепишем равенство из условия в виде

$$(ax - y)(ax + y) = a^2x^2 - y^2 = a^2 - 1.$$

Числа $a^2 - 1$ и $ax + y$ положительны, поэтому число $k = ax - y$ также положительно (и натурально). Тогда $ax + y = \frac{a^2 - 1}{k}$. Складывая два равенства, получаем

$$2ax = \frac{a^2 - 1}{k} + k = a^2 + \frac{(k - 1)(k - a^2 + 1)}{k} \leqslant a^2,$$

поскольку $1 \leqslant k \leqslant a^2 - 1$. Итак, $2ax \leqslant a^2$, то есть $a/x \geqslant 2$.

9.4. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд. (*С. Берлов*)

Решение. Лемма. *Пусть $k \geqslant 55$, и пусть среди любых k команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных $k-1$ команд. Тогда и среди любых $k+1$ команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных k команд.*

Доказательство. Предположив противное, рассмотрим набор из $k+1$ команд $M = \{C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}\}$, для которых требуемой команды не найдётся. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k+1$, если выкинуть из M команду C_i, то среди оставшихся найдётся команда C_j, проигравшая не более, чем четырём из остальных. Поскольку C_j не является требуемой для всего набора M, она проиграла также команде C_i и, более того, проиграла ровно пяти командам из M. Назовём такую команду C_j *подходящей* для команды C_i.

Рассмотрим все команды из M, являющиеся подходящими хотя бы для одной другой команды. Каждая из них является подходящей максимум для пяти из $k+1 \geqslant 56$ команд; значит, по принципу Дирихле, число s подходящих команд не менее 12.

Рассмотрим все игры между подходящими командами. Этих игр всего $s(s-1)/2$, и в каждой из них одна из s подходящих команд проиграла. Опять же по принципу Дирихле, одна из подходящих команд проиграла не менее, чем $\frac{s(s-1)}{2} : s = \frac{s-1}{2} \geqslant \frac{11}{2}$ другим подходящим командам. Значит, одна из подходящих команд проиграла хотя бы шести командам, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Для решения задачи покажем индукцией по $k = 55$, $56, \ldots$, 110, что среди любых k команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных $k-1$ команд. База при $k = 55$ верна по условию, а переход доказан в лемме. Значит, это утверждение верно при $k = 110$, что и требовалось.