10 класс

10.1. Если разделить 2014 на 105, то в частном получится 19 и в остатке тоже 19. На какие ещё натуральные числа можно разделить 2014, чтобы частное и остаток совпали? (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

Ответ: ещё на 52, на 1006 и на 2013.

Решение. Если 2014 разделили на натуральное число N и получили в частном и в остатке натуральное число k то $2014 = Nk + k = k(N+1)$, причём $k < N$. Следовательно, k — делитель числа 2014. Из приведённого в условии примера следует, что $2014 = 105 \cdot 19 + 19 = 19 \cdot 106$, что помогает разложить 2014 на простые множители: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

Теперь видно, что, помимо 19, у числа 2014 есть ещё делители 1, 2 и 38, которые порождают такие примеры на деление: $2014 = 1 \cdot 2014 = 2013 \cdot 1 + 1$, $2014 = 2 \cdot 1007 = 1006 \cdot 2 + 2$ и $2014 = 38 \cdot 53 = 52 \cdot 38 + 38$. Если же в качестве значений k рассматривать остальные делители числа 2014 (53, 106, 1007 и 2014), то они порождают значения N, не удовлетворяющие неравенству $k < N$, поэтому других решений нет.

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение* (*в ответ может быть как включено, так и не включено число* 105)

$\pm$ *доказано, что остаток является делителем* 2014, *и приведен верный ответ, но не доказано, что другие делители не дают новых ответов*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, но один из возможных ответов пропущен*

$\mp$ *доказано, что остаток является делителем* 2014, *но верный ответ не получен*

$\mp$ *приведен верный ответ и показано только, что он удовлетворяет условию*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.2. Докажите, что если в выражении $(x^2 - x + 1)^{2014}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

Решение. *Первый способ.* Докажем, что у полученного многочлена коэффициент при x будет отрицательным. Подобные слагаемые с буквенной частью x образуются при перемножении 2014 одинаковых скобок следующим образом: в одной из скобок берется слагаемое $(-x)$, а в остальных скобках — слагаемое 1. Следовательно, после приведения подобных слагаемых коэффициент при x будет равен (-2014).

Аналогичные рассуждения можно провести и для коэффициента при x^{4027}, *причем в обоих случаях достаточно объяснить, почему отрицательно каждое из слагаемых с соответствующей буквенной частью, а сам коэффициент можно не вычислять.*

Второй способ. Найдем сумму коэффициентов после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых. Она будет равна значению полученного многочлена при $x = 1$. Но это же значение получится, если подставить $x = 1$ в исходное выражение $(x^2 - x + 1)^{2014}$. Следовательно, эта сумма равна 1. Заметим, что в полученном многочлене коэффициент при x^{4028} (старший член) равен 1 и свободный член равен 1. Следовательно, должен быть хотя бы один отрицательный коэффициент.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение* (*любым из способов*)

$\pm$ *при решении первым способом объяснено почему коэффициент при* x (*или при* x^{4027}) *получится отрицательным, но сам коэффициент вычислен неверно*

$\mp$ *верно указано какой именно коэффициент будет отрицательным, но не объяснено, почему это так*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.3. В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек: A, B, C, D, E и F. Известно, что отрезки AB и DE, BC и EF, CD и FA попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки попарно равны.

Решение. *Первый способ.* В плоскости ABC есть пара пересекающихся прямых AB и BC, которые соответственно параллельны прямым DE и EF в плоскости DEF. Следовательно, плоскости ABC и DEF параллельны (по признаку параллельности плоскостей), а CD и AF — отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, значит, $CD = AF$ (по свойству параллельных прямых, пересекающих две параллельные плоскости).

Аналогично доказывается, что $AB = DE$ и $BC = EF$.

Второй способ. Сумма векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{FA}$ равна $\overrightarrow{0}$, причем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ — некомпланарные. Так как $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$, то $\overrightarrow{DE} = k_1\overrightarrow{AB}$, где k_1 — некоторое число. Аналогично, $\overrightarrow{EF} = k_2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FA} = k_3\overrightarrow{CD}$. Тогда $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA} = (1+k_1)\overrightarrow{AB}+(1+k_2)\overrightarrow{BC}+(1+k_3)\overrightarrow{CD}$.

В силу некомпланарности векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ коэффициенты при каждом из слагаемых должны равняться нулю, то есть $k_1 = k_2 = k_3 = -1$, а это и означает равенство рассматриваемых отрезков.

Отметим, что условие расположения точек не в одной плоскости является существенным. Действительно, если заданные шесть точек лежат в одной плоскости, то указанного равенства отрезков может и не быть. Например, «отрежем» от каждой вершины правильного треугольника со стороной 4 по правильному треугольнику со стороной 1 и получим шестиугольник $ABCDEF$, в котором выполняется попарная параллельность отрезков, но не выполняется их равенство. Поэтому верное решение задачи должно по существу использовать тот факт, что заданные точки не лежат в одной плоскости.

Критерии проверки

+ *приведено полное обоснованное решение (любым из способов)*

± *приведено верное, в целом, рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности*

− *задача не решена или решена неверно*

10.4. Каждый день, с понедельника по пятницу, ходил старик к синему морю и закидывал в море невод. При этом каждый день в невод попадалось не больше рыбы, чем в предыдущий. Всего за пять дней старик поймал ровно 100 рыбок. Какое наименьшее суммарное количество рыбок он мог поймать за три дня — понедельник, среду и пятницу?

Ответ: 50.

Решение. Если в каждый из первых четырех дней старик ловил по 25 рыб, а в пятницу не поймал ничего, то условия задачи выполнены, и за указанные три дня поймано ровно 50 рыб.

Докажем, что в указанные дни меньше, чем 50 рыб, поймано быть не могло. Действительно, пусть в эти дни поймано меньше, чем 50 рыб. Так как во вторник и в четверг старик поймал рыб не больше, чем в понедельник и в среду, то во вторник и в четверг также поймано меньше, чем 50 рыб. Тем самым, в сумме за пять дней поймано меньше ста рыб, что противоречит условию.

Оценку (вторую часть решения) можно записать алгебраически, причем различными способами. Пусть с понедельника по пятницу старик последовательно ловил $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5$ рыб. Тогда:

1) *если* $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 100$, *то* $a_1+a_3+a_5 = 100-(a_2+a_4) \geqslant 100-(a_1+a_3)$. *Следовательно,* $2a_1 + 2a_3 + a_5 \geqslant 100$. *Так как* $2a_5 \geqslant a_5$, *то* $a_1 + a_3 + a_5 \geqslant 50$.

2) *Так как* $a_1 \geqslant \frac{a_1+a_2}{2}$, $a_3 \geqslant \frac{a_3+a_4}{2}$, $a_5 \geqslant \frac{a_5}{2}$, *то* $a_1 + a_3 + a_5 \geqslant \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2} + \frac{a_5}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{2} = 50$.

Критерии проверки

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

∓ *приведены только верный ответ и пример*

∓ *доказана только оценка*

− *приведен только ответ*

− *задача не решена или решена неверно*

Жюри полагает, что сюжет задачи никак не должен навести решающего на мысль, что каждый день старик обязательно ловит хотя бы одну рыбку (да и в сказке Пушкина старику доводилось вытаскивать лишь тину). Однако, если решающий чётко демонстрирует такое понимание условия и обоснованно находит ответ 51, то ему следует поставить оценку +. Промежуточные критерии на эту ситуацию не распространяются.

10.5. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

Ответ: 45°.

Решение. Пусть H – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Тогда высота AT треугольника ABC содержит медиану треугольника AMN, то есть пересекает отрезок MN в его середине — точке E (см. рис. 10.5 а, б). Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как $MN \parallel AB$, то треугольники ETN и ATB подобны (см. рис. 10.5а), следовательно, $\frac{TN}{TB} = \frac{TE}{TA} = \frac{EN}{AB} = \frac{1}{4}$. Пусть $TN = x$, $TE = y$, тогда $BN = 3x$, $AE = 3y$.

Следовательно, $CT = CN - TN = 2x$, а $EH = \frac{1}{3}AE = y$ (по свойству точки пересечения медиан треугольника).

Заметим, что в прямоугольных треугольниках CTH и BTA $\frac{CT}{BT} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$ и $\frac{HT}{AT} = \frac{2y}{4y} = \frac{1}{2}$. Значит, эти треугольники подобны. Следовательно, $\angle TCH = \angle TBA$. Но CH — часть высоты CQ треугольника ABC, поэтому эти равные углы являются острыми углами прямоугольного треугольника CQB, то есть каждый из них равен $45°$.

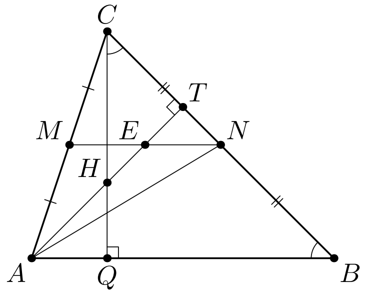

Рис. 10.5а

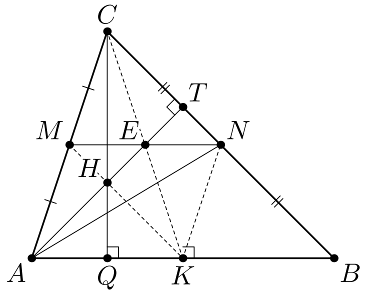

Рис. 10.5б

Второй способ. Отметим точку K — середину стороны AB (см. рис. 10.5б). Тогда $AMNK$ — параллелограмм, его диагональ MK проходит через середину AN, поэтому она проходит и через точку H.

Так как $MH \parallel BC$, то треугольники EMH и ENT равны (по стороне и двум прилежащим углам), значит, $EH = ET$. Медиана CK треугольника ABC проходит через точку E и делится в ней пополам, поэтому $CHKT$ — параллелограмм, следовательно, $TK \parallel CH$.

Но CH — часть высоты CQ треугольника ABC, поэтому $TK \perp AB$. Таким образом, TK является высотой и медианой прямоугольного треугольника ATB, значит, этот треугольник — равнобедренный, поэтому $\angle ABC = 45°$.

Существуют и другие способы решения. В частности, несложно доказать, что в данном треугольнике прямая Эйлера OH (O — центр описанной окружности треугольника ABC) параллельна AB. Тогда выполняется равенство $\operatorname{tg}\angle A \cdot \operatorname{tg}\angle B = 3$ (см., например, В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии, №5.110). Используя этот факт и некоторые дополнительные соображения, которые следуют из условия задачи, можно вычислить не только угол ABC, но и остальные углы данного треугольника.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

10.6. В одной из вершин шестиугольника лежит золотая монета, а в остальных ничего не лежит. Кощей Бессмертный чахнет над златом и каждое утро снимает с одной вершины произвольное количество монет, после чего тут же кладёт на соседнюю вершину в шесть раз больше монет. Если к исходу какого-то дня во всех вершинах будет поровну монет, Кощей станет Властелином Мира. Докажите, что хоть злата у него сколько угодно, но Властелином Мира ему не бывать.

Решение. Занумеруем вершины шестиугольника, начиная с той, где лежит монета, последовательными натуральными числами от 1 до 6 (двигаясь, например, против часовой стрелки). Обозначим через n_1, n_2, ..., n_6 — количества монет, лежащих в вершинах 1, 2, ..., 6 соответственно. Пусть $N_1 = n_1 + n_3 + n_5$, $N_2 = n_2 + n_4 + n_6$.

Рассмотрим разность $N_1 - N_2$ и докажем, что при указанных действиях Кощея остаток от ее деления на 7 не изменяется. Действительно, если из какой-то вершины шестиугольника Кощей забирает x монет, а в соседнюю вершину добавляет $6x$ монет, то значение $N_1 - N_2$ изменяется на $7x$.

Заметим, что в начальный момент $N_1 - N_2 = 1$. Поэтому цель Кощея — уравнять количество монет во всех вершинах, а значит сделать так, чтобы $N_1 - N_2$ было равно нулю, — недостижима.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, рассуждение, в котором допущены несущественные пробелы или неточности*

$-$ *задача не решена или решена неверно*