7 класс

7.1. В тридевятом царстве есть только два вида монет: 16 и 27 тугриков. Можно ли заплатить за одну тетрадку ценой в 1 тугрик и получить сдачу?

Ответ: да, можно.

Решение. Например, можно заплатить тремя монетами по 27 тугриков и получить сдачу пятью монетами по 16 тугриков.

Возможны и другие примеры, которые приведем в общем виде:

а) *заплатить* $3+16n$ *монет по* 27 *тугриков и получить сдачу* $5+27n$ *монет по* 16 *тугриков, где* n — *натуральное число*;

б) *заплатить* $22+27m$ *монет по* 16 *тугриков и получить сдачу* $13+16m$ *монет по* 27 *тугриков, где* m — *натуральное число или ноль.*

Эти примеры получаются из следующих соображений. Понятно, что платить и получать сдачу монетами одного достоинства бессмысленно. Следовательно, необходимо подобрать такие целые числа x *и* y, *чтобы выполнялось равенство* $16x+27y=1$.

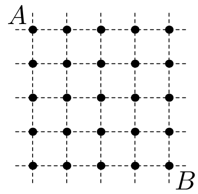
Отметим, что уравнение вида $ax+by=c$ *имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда число* c *кратно* НОД$(a;b)$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и пример*

$\pm$ *приведено несколько примеров, среди которых есть как верные, так и неверные*

$-$ *задача не решена или решена неверно*



7.2. Соедините точки A и B (см. рисунок) ломаной из четырех отрезков одинаковой длины так, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:

1) концами отрезков могут быть только какие-то из отмеченных точек;

2) внутри отрезков не должно быть отмеченных точек;

3) соседние отрезки не должны лежать на одной прямой.

(*Достаточно привести один пример.*)

Ответ: возможен один из вариантов проведения ломаной, показанных на рис. 7.2 а, б, в (с точностью до симметрии относительно прямой AB).

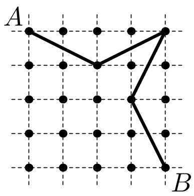


Рис. 7.2а

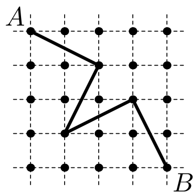


Рис. 7.2б

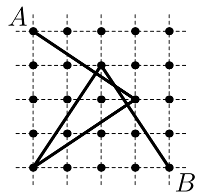


Рис. 7.2в

Критерии проверки:

$+$ *приведен верный пример*

$\pm$ *приведено несколько примеров, среди которых есть как верные, так и неверные*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

7.3. У юного художника была одна банка синей и одна банка желтой краски, каждой из которых хватает на покраску **38 дм^2** площади. Использовав всю эту краску, он нарисовал картину: синее небо, зеленую траву и желтое солнце. Зеленый цвет он получал, смешивая две части желтой краски и одну часть синей. Какая площадь на его картине закрашена каждым цветом, если площадь травы на картине на **6 дм^2** больше, чем площадь неба?

Ответ: синим закрашено 27 дм^2, зеленым — 33 дм^2, а желтым — 16 дм^2.

Решение. *Первый способ.* Обозначим площади, закрашенные синим (blue), зеленым (green) и желтым (yellow) цветом, как B, G и Y соответственно. Так как зеленый цвет получается смешением двух частей желтой краски и одной части синей, то на закрашивание зеленым цветом площади G расходуется количество желтой краски, соответствующее площади $\frac{2}{3}G$, а синей — $\frac{1}{3}G$. Учитывая, что вся синяя краска была израсходована, составим уравнение: $B+\frac{1}{3}G=38$. Кроме того, по условию, G на 6 дм^2 больше, чем B, то есть $B=G-6$. Подставив значение B составленное уравнение, получим, что $G=33$, значит, $B=27$.

Так как вся желтая краска также была израсходована, то $Y + \frac{2}{3}G = 38$. Подставив в это равенство значение $G = 33$, получим, что $Y = 16$.

Второй способ. Обозначим через x одну часть, пошедшую на получение зеленой краски. Тогда желтой краской покрашено $(38 - 2x)$ дм^2, зеленой — $3x$ дм^2, а синей — $(38 - x)$ дм^2. Поскольку по условию зеленым покрашено на 6 дм^2 больше, чем синим, то $3x - 6 = 38 - x$. Отсюда $x = 11$, следовательно, желтой краской покрашено $38 - 2 \cdot 11 = 16$ дм^2, зеленой $3 \cdot 11 = 33$ дм^2, синей $38 - 11 = 27$ дм^2.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, найдены все три площади, но допущена арифметическая ошибка*

$\pm$ *приведено верное рассуждение, но найдены только две площади из трех*

$\mp$ *верно составлено уравнение (система уравнений), но оно (она) не решено (решена)*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

7.4. Биолог последовательно рассаживал 150 жуков в десять банок. Причем в каждую следующую банку он сажал жуков больше, чем в предыдущую. Количество жуков в первой банке составляет не менее половины от количества жуков в десятой банке. Сколько жуков в шестой банке?

Ответ: в шестой банке — 16 жуков.

Решение. Пусть в первой банке x жуков, тогда во второй банке — не меньше, чем $x + 1$ жуков, в третьей — не меньше, чем $x+2$ жука, и так далее. Таким образом, в десятой банке не меньше, чем $x + 9$ жуков. Следовательно, общее количество жуков не меньше, чем $10x + 45$. Учитывая, что всего рассаживали 150 жуков, получим: $x \leqslant 10$.

С другой стороны, в десятой банке должно быть не больше, чем $2x$ жуков, в девятой — не больше, чем $2x - 1$ жуков, и так далее. Это означает, что в первой банке — не больше, чем $2x - 9$ жуков, а всего жуков — не больше, чем $20x - 45$. Так как всего рассаживали 150 жуков, то $x \geqslant 10$.

Таким образом, в первой банке ровно 10 жуков, а в последней банке — 19 или 20. Найдем сумму одиннадцати последовательных чисел, начиная с десяти: $10 + 11 + \ldots + 19 + 20 = 165$. Так как всего должно быть 150 жуков, то отсутствует банка, в которой 15 жуков. Следовательно, рассадка определяется однозначно: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19 и 20 жуков с первой по десятую банку соответственно. Значит, в шестой банке — 16 жуков.

Доказав, что $x \leqslant 10$, *можно продолжить рассуждения иначе. Так как в десятой банке не меньше, чем* $x+9$ *жуков, причем* $x+9 \leqslant 2x$, *то* $x \geqslant 9$. *Затем рассмотреть два случая:* $x = 9$ *и* $x = 10$, *оценивая количество жуков в десятой банке.*

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные, в целом, оценки количества жуков как «сверху», так и «снизу», которые содержат некоторые пробелы*

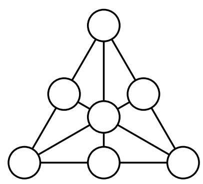
$\pm$ *приведены верные обоснованные оценки количества жуков как «сверху», так и «снизу», верно найдена рассадка жуков по банкам, но ответ на вопрос задачи неверен или отсутствует*

$\mp$ *верно проведена только одна из двух требуемых оценок*

$\mp$ *верно указана рассадка жуков по банкам, но она не обоснована*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*



7.5. Можно ли в кружках (см. рисунок) разместить различные натуральные числа таким образом, чтобы суммы трех чисел вдоль каждого отрезка оказались равными?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Пусть требуемая расстановка существует, S — сумма всех расставленных чисел, a и b — числа, стоящие в кружках, расположенных в каких-либо двух вершинах треугольника. Тогда для той вершины, в которой стоит число a, сумма чисел вдоль трех отрезков, содержащих эту вершину, равна $S + 2a$. Аналогично, для вершины, в которой стоит число b, эта сумма равна $S + 2b$. Так как суммы чисел вдоль любого отрезка равны, то и суммы чисел вдоль трех отрезков также равны, то есть $S + 2a = S + 2b$, откуда следует, что $a = b$. Но это противоречит условию, где сказано, что все числа должны быть различными. Таким образом, требуемой расстановки не существует, что и требовалось доказать.

Аналогичное рассуждение можно проводить для любой пары кружков, через каждый из которых проходит ровно три отрезка.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, рассуждение, которое содержит некоторые пробелы или недочеты*

$\mp$ *найдена идея суммирования чисел по трем отрезкам, содержащим один и тот же кружок, но дальнейших продвижений нет*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*