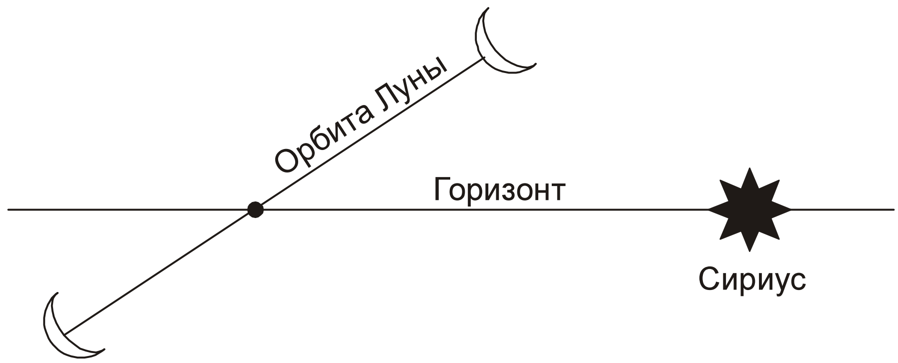
10 класс

1. Условие. В календаре одного народа новый день начинался с восходом Сириуса, новый месяц – когда впервые Луна восходит позже Сириуса, а новый год – когда Сириус впервые появляется перед восходом Солнца (все относится к столице государства этого народа в тропическом поясе Земли). Сколько в среднем дней (отсчитываемых этим народом) содержит один месяц и один год в таком календаре? Прецессией лунной орбиты и земной оси, собственным движением Сириуса пренебречь. Считать, что астрономы этого народа имели возможность наблюдать Луну и Сириус днем.

1. Решение. Промежуток времени между двумя последовательными восходами одной далекой звезды (не Солнца) есть одни звездные сутки S, равные 23 часа 56 минут 04 секунды или 0.99727 обычных суток. Если пренебречь прецессией лунной орбиты, то на ней можно выделить одну точку, которая будет восходить над горизонтом в момент восхода Сириуса:



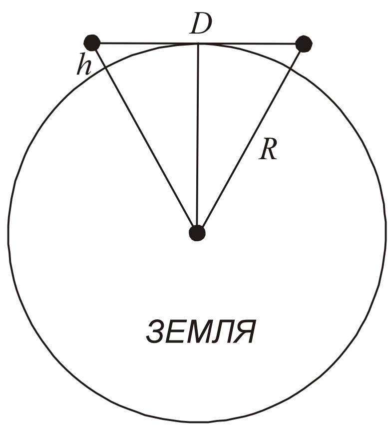
Очевидно, что новый месяц начнется после того, как Луна пройдет через эту точку (с ближайшим восходом Луны). Средняя продолжительность месяца составит период между двумя прохождениями Луны через эту точку. Это есть сидерический (звездный) период Луны T, равный 27.32 суток. Аналогичная ситуация будет с годом – он начнется после того, как Солнце в своем видимом пути по эклиптике пройдет точку, восходящую вместе с Сириусом. Период между двумя такими моментами есть сидерический (звездный) год T_0. Так как по условию задачи мы пренебрегаем прецессией земной оси, длительность сидерического года можно считать равной обычному году – 365.24 суток. В итоге, число дней в месяце и годе такого календаря в среднем составит

$$N = \frac{T}{S} = 27.4; \quad N_0 = \frac{T_0}{S} = 366.24.$$

1. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны показать, каким известным в астрономии величинам будут равны продолжительности дня, месяца и года по данному календарю. Данные этапы решения оцениваются по 2 балла каждое. Если в качестве дня указывается обычный средний солнечный день, а в качестве месяца – лунный (синодический) месяц, то соответствующие баллы не выставляются. Окончательные вычисления числа дней в месяце и годе оцениваются еще по 1 баллу.

2. Условие. Древняя цивилизация построила на Земле (включая океаны) сеть сигнальных башен высотой 30 метров. С верхней площадки каждой башни были видны верхние площадки, по крайней мере, двух соседних башен. Зажигая на них огни определенного цвета, можно было быстро передавать на большие расстояния весть об опасности. За какое минимальное время такую информацию можно было распространить по всей Земле, если время реакции солдата на башне, зажигающего огни, составляет 10 секунд? Атмосферным ослаблением света, рефракцией и рельефом Земли пренебречь.

2. Решение. Для решения задачи определим максимальное расстояние между двумя соседними башнями, чтобы с вершины одной из них можно было видеть вершину другой.



С учетом того, что высота башни h существенно меньше радиуса Земли R, получаем:

$$D = 2\sqrt{(R+h)^2 - R^2} \approx 2\sqrt{2Rh} = 39.1 \text{ км.}$$

Через время t (10 секунд) на соседней башне также загорится сигнальный огонь. В итоге, скорость передачи информации v составит почти 4 км/с. Определим, за какое время эта информация достигнет противоположной точки Земли, предполагая, что все передающие ее башни располагаются на одном большом круге:

$$T=\frac{\pi R}{v}=\frac{\pi R t}{D}=\frac{\pi t}{2}\sqrt{\frac{R}{2h}}=5100\ \text{с}$$

или 1.4 часа. Данный способ, очевидно, наиболее быстрый для цивилизаций, не располагающих радиосвязью и возможностью запуска космических аппаратов.

2. Рекомендации для жюри. Основной этап решения состоит в вычислении расстояния между соседними башнями. Его можно производить в общем или численном виде, с использованием точных или приближенных формул. Данный этап решения оценивается в 4 балла. Вычисление времени обхода половины окружности Земли оценивается также в 4 балла.

3. Условие. Астрономы наблюдали далекую звезду, физически похожую на Солнце, и зафиксировали падение ее яркости на 0.1% в течение 5 часов, вызванное прохождением по ее диску планеты. Найдите расстояние между планетой и звездой, считая орбиту планеты круговой. Определите размер планеты, считая, что она прошла по центру диска звезды. На какую планету Солнечной системы похожа эта далекая планета по размерам?

3. Решение. Планета прошла по центру диска звезды, отчего видимая яркость звезды уменьшилась на 1/1000 часть. Наблюдения ведутся с расстояния, много большего радиуса орбиты планеты, поэтому можно считать, что соотношение видимых размеров звезды и планеты такое же, как соотношение их истинных размеров. Тогда мы можем определить радиус планеты:

$$r=\frac{R}{\sqrt{1000}}\approx 0.03\,R.$$

Здесь R – радиус звезды, который по условию задачи близок к радиусу Солнца. Радиус планеты оказывается равен 22 тысячи км, то есть планета по размерам напоминает Уран и Нептун.

Вновь учитывая, что наблюдения происходят издалека, отметим, что длительность прохождения планеты T есть ни что иное, как время, за которое планета в своем орбитальном движении пролетает расстояние, равное диаметру звезды. Отсюда мы получаем скорость планеты:

$$v = \frac{2R}{T} \approx 80 \text{ км/с}.$$

Эта величина по сути – первая космическая скорость на заданном расстоянии от звезды. Так как эта звезда схожа с Солнцем и по размерам, и по массе, мы можем легко определить радиус орбиты планеты в астрономических единицах, сравнив ее орбиту с земной:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{v_0^2}{v^2} = 0.15.$$

Здесь d_0 – расстояние от Земли до Солнца (астрономическая единица), v_0 – орбитальная скорость Земли.

3. Рекомендации для жюри. Задача разделяется на два этапа – определение размеров планеты и радиуса ее орбиты, которые можно выполнять в произвольном порядке. Вычисление радиуса планеты оценивается в 3 балла, указание Урана и Нептуна как похожих по размерам планеты – еще в 1 балл (достаточно указание любой одной из этих планет). Вычисление орбитальной скорости планеты оценивается в 2 балла, последующее вычисление радиуса орбиты (0.15 а.е. или 22 млн км) – еще в 2 балла.

4. Условие. Собственное движение звезды за 1 год равно ее годичному параллаксу. Определите тангенциальную скорость звезды (в км/с) относительно Солнца.

4. Решение. По определению, годичный параллакс звезды π – это угол, под которым с этой звезды виден отрезок r, равный среднему расстоянию Земли от Солнца (1 а.е). Если выразить расстояние от Солнца до звезды L в парсеках, а параллакс – в угловых секундах, то

$$\pi'' = 1 \text{ а.е.} / L \text{ (пк)}.$$

Собственное движение μ – это угловая скорость движения звезды по небу. Если за время T звезда прошла расстояние D перпендикулярно лучу зрения, то

$$\mu'' = D \text{ (а.е.)} / L \text{ (пк) } T.$$

По условию задачи перемещение звезды за время T, равное 1 году

$$\mu''T = \pi'',$$

отсюда получается, что за это время звезда прошла расстояние D, равное 1 а.е. В этом можно также напрямую убедиться из определения данных величин. Тангенциальная скорость звезды по отношению к Солнцу равна

$$v_T = D\ /\ T = 1 \text{ а.е.} / 1 \text{ год} = 1.5\cdot10^8 \text{ км} / 3.156\cdot10^7 \text{ с} = 4.74 \text{ км/с}.$$

4. Рекомендации для жюри. Выше приведено наиболее полное решение задачи, для участников олимпиады возможно и более краткое изложение, что не является ошибкой. В частности, они могут напрямую написать, что годичный параллакс есть угол, под которым на расстоянии звезды виден отрезок в 1 а.е., следовательно, в своем тангенциальном движении за год звезда прошла именно это расстояние. Данный вывод оценивается в 5 баллов. Дальнейшее вычисление скорости и ее перевод в км/с оценивается в 3 балла.

5. Условие. В одной из книг по астрономии было сказано, что яркость зодиакального света на расстоянии 30°-35° от Солнца равна суммарной яркости 7-8 звезд 5^m на один квадратный градус. Переведите величину яркости в звездные величины с квадратного градуса. Сравните численно полученную величину со средней поверхностной яркостью Туманности Андромеды. Считать туманность прямоугольной с угловым размером 190'×60', ее интегральная звездная величина равна 3.4^m.

5. Решение. Освещенность от одной звезды 5^m в 100 раз меньше, чем от звезды 0^m. Если звезд не одна, а 7-8 (допустим, 7.5), то освещенность будет уже в 100/7.5=13.3 раз меньше. Согласно формуле Погсона:

$$m = 2.5\lg\frac{100}{7.5} = 2.8.$$

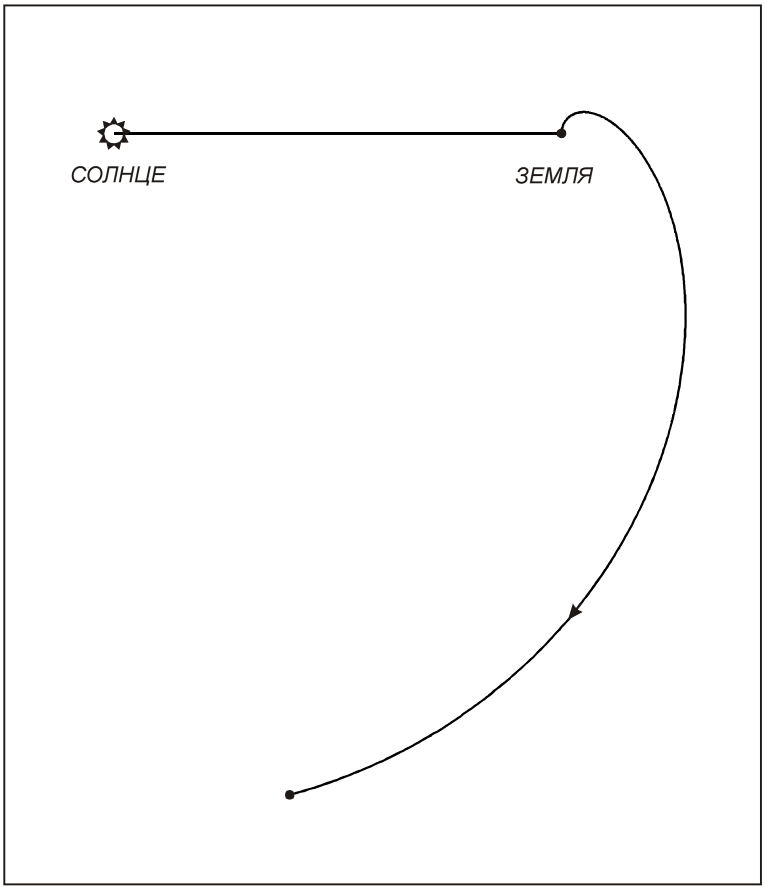
Итого, яркость зодиакального света на указанном угловом расстоянии от Солнца составляет 2.8^m с квадратного градуса. Звездная величина 3.4^m соответствует звездной величине точечного источника, который освещает Землю также, как и вся Туманность Андромеды. Чтобы получить среднюю поверхностную яркость на один квадратный градус, соответствующую освещенность нужно разделить на площадь туманности в квадратных градусах. По формуле Погсона получаем:

$$m = 3.4 + 2.5\lg S = 3.4 + 2.5\lg(3.2 \cdot 1) = 4.7$$

Таким образом, Туманность Андромеды в среднем на 2^m, то есть в 6 раз слабее, чем зодиакальный свет в 30-35° от Солнца. Это не мешает туманности легко быть видимой на небе вследствие наличия яркого ядра и значительного перепада яркости вокруг него.

5. Рекомендации для жюри. Первым этапом решения задачи является выражение яркости зодиакального света в звездных величинах с квадратного градуса. Этот этап оценивается в 3 балла. Сравнение этой яркости со средней яркостью туманности Андромеды оценивается в 5 баллов. Это может производиться разными способами. Можно вычислять среднюю яркость туманности Андромеды (3 балла) и сравнивать ее с полученной яркостью зодиакального света (2 балла). Возможно также вычислить звездную величину зодиакального света со всей площади туманности (2 балла) и сравнить ее с интегральной величиной туманности (3 балла).

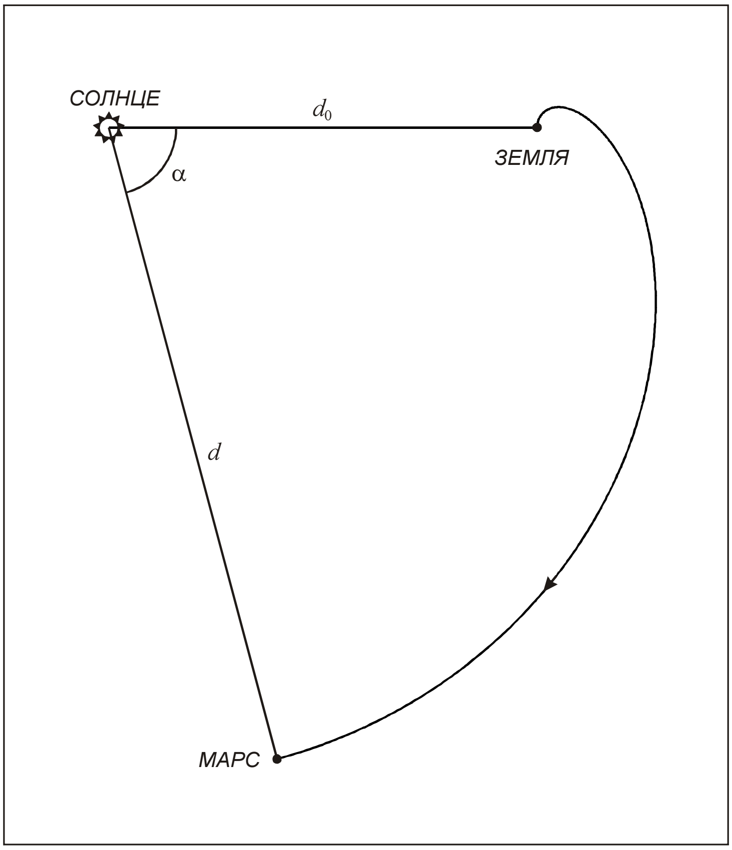
6. Условие. На рисунке показана траектория космического аппарата, летящего от Земли к некоторому объекту Солнечной системы относительно линии Солнце-Земля (неподвижной в данной системе отсчета) со стороны северного полюса эклиптики. Определите характеристики траектории аппарата (большая полуось, эксцентриситет) относительно Солнца и продолжительность полета по данной траектории без включения двигателей. Орбиту Земли считать круговой.



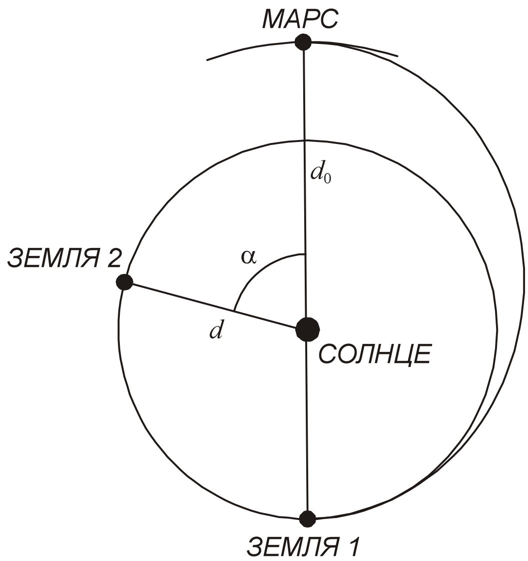
6. Решение. По рисунку мы можем определить расстояние от Солнца до объекта – цели полета аппарата:

$$d = 1.52\ d_0.$$

Здесь d_0 – расстояние от Солнца до Земли. По всей видимости, целью миссии является планета Марс. Аппарат движется в этой системе отсчета по часовой стрелке, то есть в неподвижной системе отсчета он отставал от Земли. Необходимо выяснить, по какой траектории осуществлялся перелет. Обратим внимание, что траектория аппарата в данной системе отсчета перпендикулярна линии "Солнце-Земля" во время старта и перпендикулярна линии "Солнце-Марс" при прибытии к этой планете. Радиальная компонента скорости (направленная вдоль линии "Солнце-аппарат") в эти моменты обращается в ноль. Коль скоро это выполняется в системе отсчета, вращающейся вокруг Солнца, это будет так и в неподвижной системе отсчета.



Последний вывод указывает, что аппарат двигался по эллипсу, у которого точка вылета была перигелием, а точка прилета – афелием (эллипс Гомана). В дальнейшем мы сможем дополнительно проверить этот факт.



Большая полуось и эксцентриситет такой орбиты будут равны:

$$a = \frac{d + d_0}{2} = 1.26 \text{ а.е.}; \quad e = \frac{d - d_0}{d + d_0} = 0.21.$$

Время перелета есть половина орбитального периода для этого эллипса:

$$T = \frac{T_0}{2}\left(\frac{a}{d_0}\right)^{3/2} = 0.71 \text{ года}.$$

Здесь T_0 – орбитальный период Земли (1 год). За этот период сама Земля сместится по своей орбите на угол 360° (T/T_0) = 255°. Угол α между гелиоцентрическими направлениями на Землю и аппарат составит 75°, что соответствует данным рисунка. Таким образом мы еще раз убеждаемся в том, что аппарат действительно летел по эллипсу Гомана с заданными параметрами.

6. Рекомендации для жюри. Первым этапом решения задачи является определение расстояние от Солнца до конечной точки траектории (при этом от участников ***не требуется*** указание планеты Марс как возможной цели миссии). Данный этап решения оценивается в 2 балла. Далее участники должны обосновать, что аппарат двигался по эллипсу, у которого начальная и конечная точки являются перигелием и афелием. Это можно делать любым из двух приведенных выше способов, что оценивается в 3 балла. Если данный факт принят без обоснования, то эти 3 балла не выставляются, но все остальные (предыдущие и последующие) этапы решения оцениваются в полной мере. Вычисление большой полуоси и эксцентриситета эллипса, а также времени перелета оценивается еще по 1 баллу.