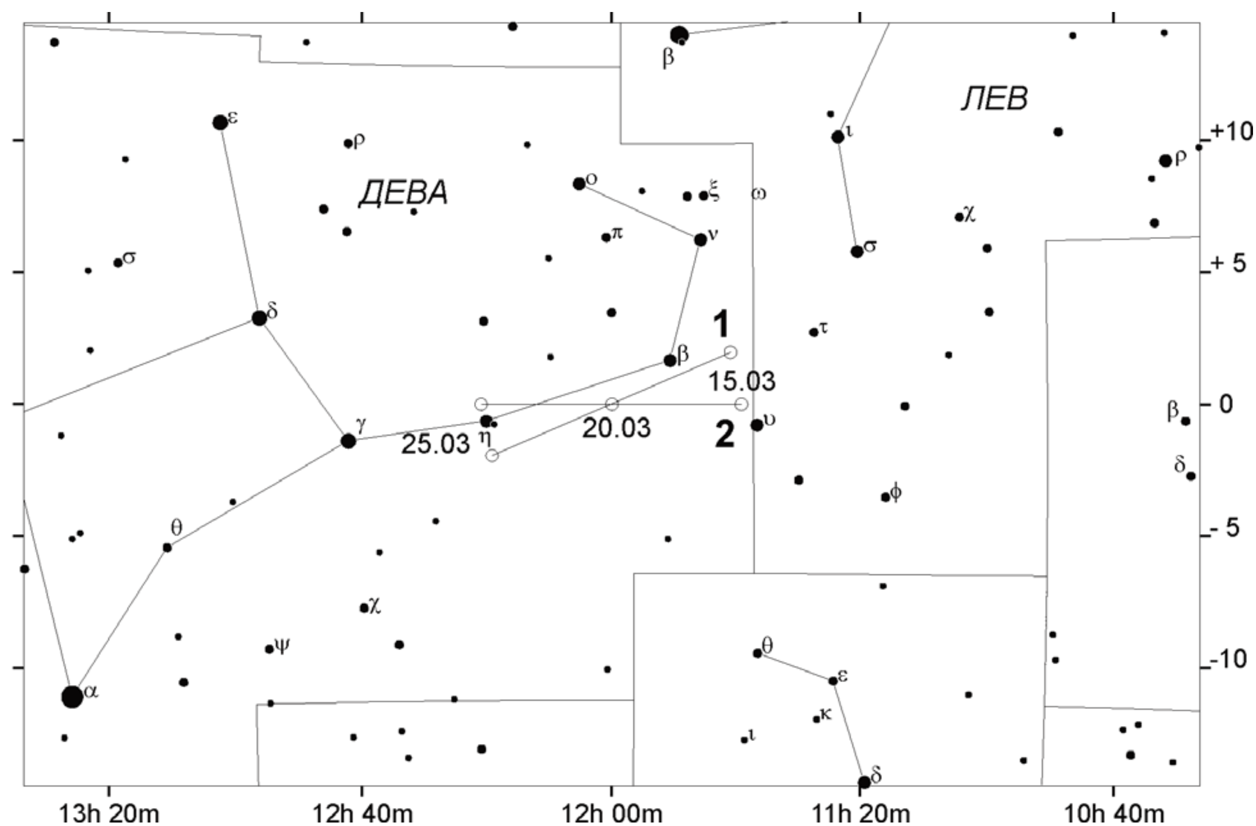
10-11 классы

X/XI.1 ВЕСЕННЯЯ КОМЕТА

О.С. Угольников

? Вам представлена карта участка звездного неба, на которую нанесен трек кометы (10 класс – вариант 1, 11 класс – вариант 2). Известно, что орбита кометы параболическая, и 20 марта она прошла точку перигелия. Определите расстояние между Землей и кометой в момент ее перигелия. Для варианта 2 найдите также угол наклона орбиты кометы к плоскости эклиптики. Орбиту Земли считать круговой.



! По звездной карте мы видим, что 20 марта, в день своего перигелия, комета прошла точку осеннего равноденствия в небе Земли. То есть, в этот же момент она располагалась в плоскости эклиптики и в противостоянии с Солнцем. Это значит, что комета в пространстве находилась дальше от Солнца, чем Земля, и искомое расстояние между Землей и кометой d есть $r - r_0$, где r – расстояние от кометы до Солнца, а r_0 – радиус орбиты Земли. Направление движения кометы в этот момент происходит перпендикулярно направлению на Солнце и Землю.

Заметим также, что комета (в отличие от внешних планет в противостоянии) двигалась относительно звезд в прямом направлении, с запада на восток. Это означает, что в пространстве комета перемещалась быстрее Земли, что возможно с учетом ее параболической орбиты. По рисунку мы видим, что комета 1 движется в небе Земли вдоль эклиптики. Так как сама Земля также перемещается в пространстве в плоскости эклиптики, мы можем сделать вывод, что плоскости орбит Земли и кометы 1 фактически совпадают. Комета 2 вблизи противостояния перемещалась вдоль небесного экватора, под углом ε (23.4°) к эклиптике. Может показаться, что это и есть угол наклона орбиты кометы к плоскости эклиптики, но это не так: видимое перемещение кометы среди звезд есть наложение ее собственного движения и движения Земли, которые происходят в разных плоскостях.

Измерив угловое перемещение кометы на небе за 5 дней, мы получаем величину 4.9°. Ровно такую же дугу описывает за 5 дней Земля в своем орбитальном движении. Получается, что видимая угловая скорость кометы в небе Земли равна угловой скорости самой Земли ω_0. Изобразим Землю и комету на своих орбитах в момент перигелия кометы.

Обозначим вектора гелиоцентрических скоростей кометы и Земли как $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v_0}$. Геоцентрическая скорость кометы равна

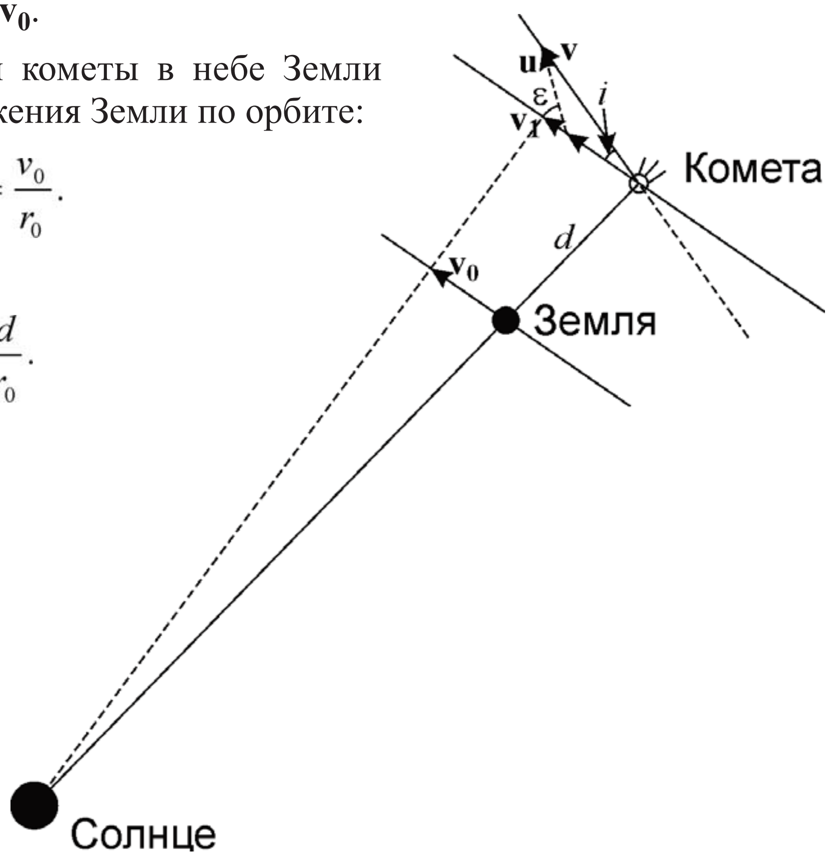
$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v_0}.$$

Угловая скорость движения кометы в небе Земли равна угловой скорости движения Земли по орбите:

$$\omega_0 = \frac{u}{d} = \frac{v_0}{r_0}.$$

Отсюда

$$u = v_0 \frac{d}{r_0}.$$



У кометы 1 соответствующий вектор $\mathbf{u_1}$ сонаправлен с вектором скорости движения Земли $\mathbf{v_0}$. Гелиоцентрическая скорость кометы равна

$$v_1 = u_1 + v_0 = v_0(1 + \frac{d_1}{r_0}).$$

Мы знаем, что орбита кометы параболическая, и гелиоцентрическая скорость есть вторая космическая для данного расстояния:

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{2r_0}{r_0 + d_1}}.$$

Приравнивая две последние формулы и опуская знак корня в обеих частях уравнения, получаем:

$$\left(\frac{r_0 + d_1}{r_0}\right)^2 = \frac{2r_0}{r_0 + d_1}; \quad \left(\frac{r_0 + d_1}{r_0}\right)^3 = 2.$$

Отсюда

$$d_1 = r_0(\sqrt[3]{2} - 1) = 0.26 \text{ а.е.}$$

Далее мы рассматриваем только комету 2, поэтому соответствующий индекс у величин u, v и d можно опустить. Движение этой кометы и Земли происходит в разных плоскостях. Гелиоцентрическая скорость кометы равна

$$v = \sqrt{(u\,sin\varepsilon\,)^2 + (u\,cos\varepsilon + v_0\,)^2} = \sqrt{u^2 + 2v_0u\,cos\varepsilon + v_0^2} = v_0\sqrt{\frac{d^2}{r_0^2} + 2\frac{d}{r_0}cos\varepsilon + 1}.$$

Как и в случае первой кометы, орбита кометы параболическая, и гелиоцентрическая скорость есть вторая космическая для данного расстояния:

$$v = v_0\sqrt{\frac{2r_0}{r_0 + d}}.$$

Приравнивая две последние формулы и опуская знак корня в обеих частях уравнения, получаем:

$$\frac{d^2}{r_0^2} + 2\frac{d}{r_0}cos\varepsilon + 1 = \frac{2r_0}{r_0 + d}.$$

В общем виде, это кубическое уравнение, достаточно сложное для решения. Однако мы можем сделать некоторое упрощение, воспользовавшись тем, что угол ε не очень большой. Обозначим отношение (d/r_0) как x и перепишем уравнение:

$$(x+1)^3 = 2 + 2x(x+1)(1 - cos\varepsilon\,).$$

Рассмотрим для начала случай $\varepsilon = 0$ (фактически, это аналогично комете 1). Тогда мы получаем простое уравнение:

$$(\,x_0 + 1)^3 = 2; \;\; x_0 = \sqrt[3]{2} - 1 = 0.260.$$

Для сложного случая пусть $x = x_0 + \delta x$, где δx – малая величина. Тогда

$$(x+1)^3 \approx (x_0+1)^3 + 3(x_0+1)^2\delta x = 2 + 2(x_0+\delta x)(x_0+\delta x+1)(1-\cos\varepsilon).$$

Учтем, что величина $(1-\cos\varepsilon)$ невелика, и пренебрежем в формуле слагаемыми, пропорциональными произведению двух малых величин $(1-\cos\varepsilon)\delta x$, а также δx^2. Тогда получаем

$$3(x_0+1)^2\delta x = 2(1-\cos\varepsilon)x_0(x_0+1).$$

В итоге,

$$\delta x = \frac{2(1-\cos\varepsilon)x_0}{3(x_0+1)}; \quad x = \sqrt[3]{2} - 1 + \frac{2(1-\cos\varepsilon)(\sqrt[3]{2}-1)}{3\cdot\sqrt[3]{2}} = 0.271.$$

Мы видим, что предположение о малости величины δx полностью оправдывается. Полученное в итоге значение x с точностью до третьего знака после запятой совпадает с истинным значением, получаемым при решении кубического уравнения (0.272). Итак, комета располагалась примерно в 0.27 а.е. от Земли.

Нам остается найти угол наклона орбиты кометы к плоскости эклиптики. Перигелийное расстояние кометы составляет 1.27 а.е. Гелиоцентрическая скорость кометы в момент перигелия равна

$$v = v_0\sqrt{\frac{2r_0}{r_0+d}}.$$

Для угла наклона орбиты имеем:

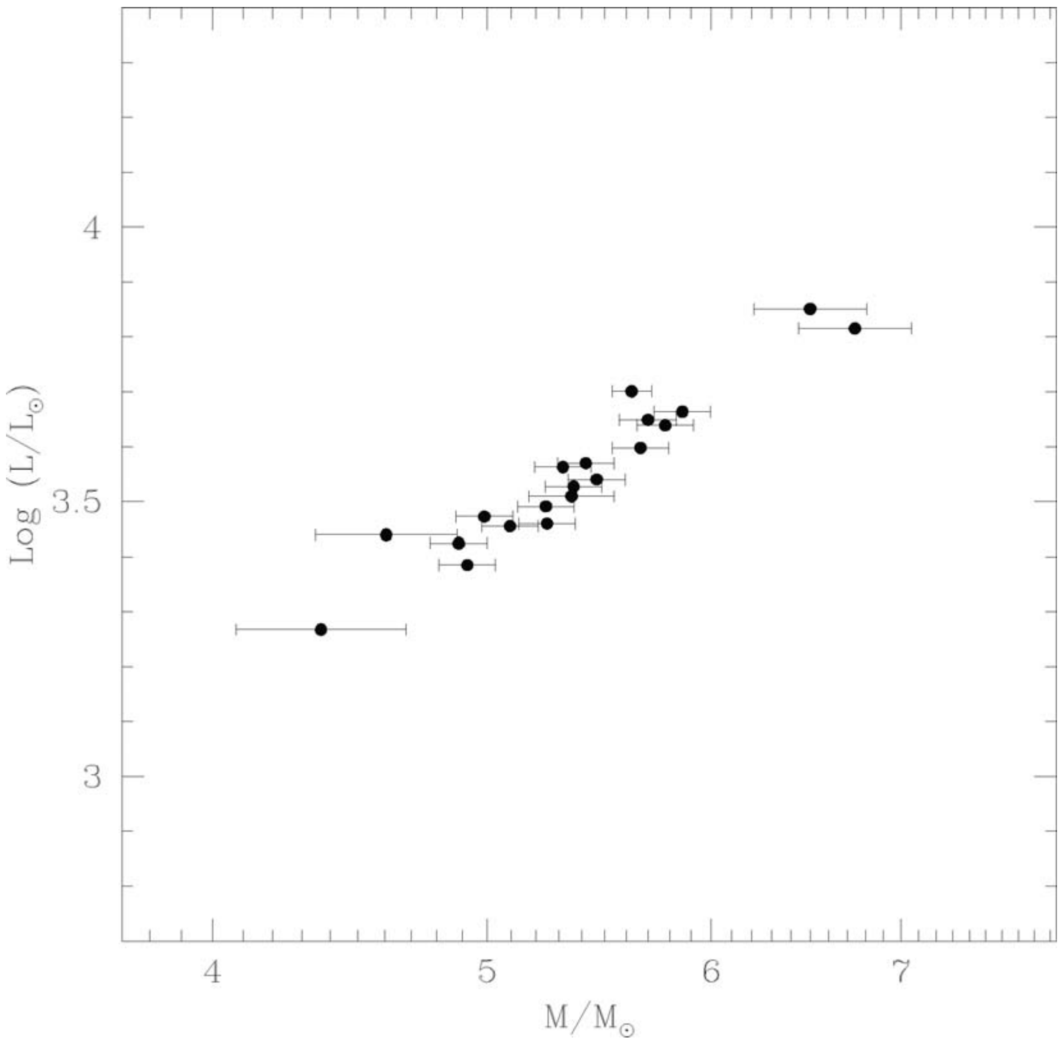
$$v\sin i = u\sin\varepsilon; \quad \sin i = \sin\varepsilon\,\frac{u}{v} = \sin\varepsilon\,\frac{v_0}{v}\cdot\frac{d}{r_0} = \sin\varepsilon\,\frac{d}{r_0}\sqrt{\frac{r_0+d}{2r_0}}.$$

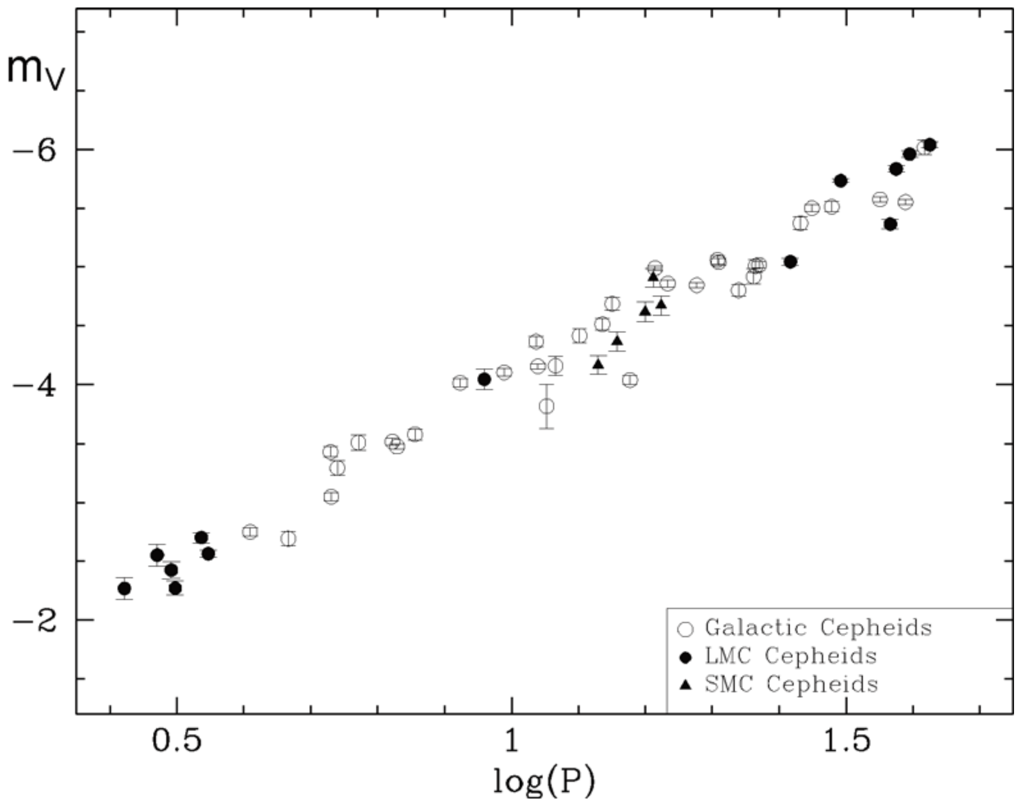
Наклонение орбиты кометы к плоскости эклиптики равно 4.9°.

X/XI.2 МАЯКИ ГАЛАКТИК

О.С. Угольников

? Перед Вами диаграммы "масса – средняя светимость" и "период – средняя абсолютная звездная величина" для некоторых цефеид нашей Галактики, Большого и Малого Магелланова облака. Период колебаний цефеид выражен в сутках, абсолютная величина дана в полосе V, массы на первом графике отложены в логарифмическом масштабе. Оцените по этим диаграммам диапазон характерных значений средней температуры на планете, обращающейся вокруг цефеиды по круговой орбите с периодом, в 6000 раз большим периода изменений блеска цефеиды. Альбедо и "парниковые" свойства атмосферы планеты считать аналогичными Земле. Болометрической поправкой Солнца и цефеид пренебречь.


Log (L/L☉)
4
3.5
3
4
5
6
7
M/M☉


m_V
−6
−4
−2
0.5
1
1.5
log(P)
Galactic Cepheids
LMC Cepheids
SMC Cepheids

! Приведенные графики связывают среднюю светимость цефеиды с ее массой и периодом пульсаций. Правда, светимость задана на этих графиках по-разному – в виде ее отношения к солнечной светимости на первом графике и абсолютной звездной величины на втором. Первое выражение более удобно для решения задачи, поэтому мы приведем к нему выражение на втором графике.

Зависимости на обеих диаграммах близки к линейным, однако по осям и там, и там отложены логарифмы параметров звезд. Это относится и к оси абсцисс первого графика, где массы отложены в логарифмическом масштабе. Проведем прямые через экспериментальные точки на графиках. Заметим, что хоть на втором графике и приведены данные для разных галактик, они хорошо согласуются друг с другом, что указывает на общие свойства цефеид в галактиках.

Проведя прямые через экспериментальные точки и определив значение ординат для двух значений абсцисс, мы получаем эмпирические соотношения, связывающие массу, период пульсаций и светимость цефеид:

$$\log (L/L_0) = 1.14 + 3.3 \log (M/M_0);$$
$$m_V = -1.0 - 3.0 \log (P);$$
$$\log (L/L_0) = 0.4\,(4.72 + 1.0 + 3.0 \log (P)) = 2.28 + 1.2 \log (P).$$

Здесь мы учли, что абсолютная звездная величина Солнца равна +4.72, пренебрегая его болометрической поправкой. Переведем эти соотношения из логарифмических в нормальные:

$$\frac{L}{L_0} = 10^{1.14}\left(\frac{M}{M_0}\right)^{3.3} = 14\left(\frac{M}{M_0}\right)^{3.3} = 10^{2.28}\,P^{1.2} = 200\,P^{1.2}.$$

Отсюда мы можем связать напрямую период пульсаций с массой (напомним, период выражается в сутках):

$$P = \left(\frac{14}{200}\left(\frac{M}{M_0}\right)^{3.3}\right)^{1/1.2} = \frac{1}{9}\left(\frac{M}{M_0}\right)^{2.75}.$$

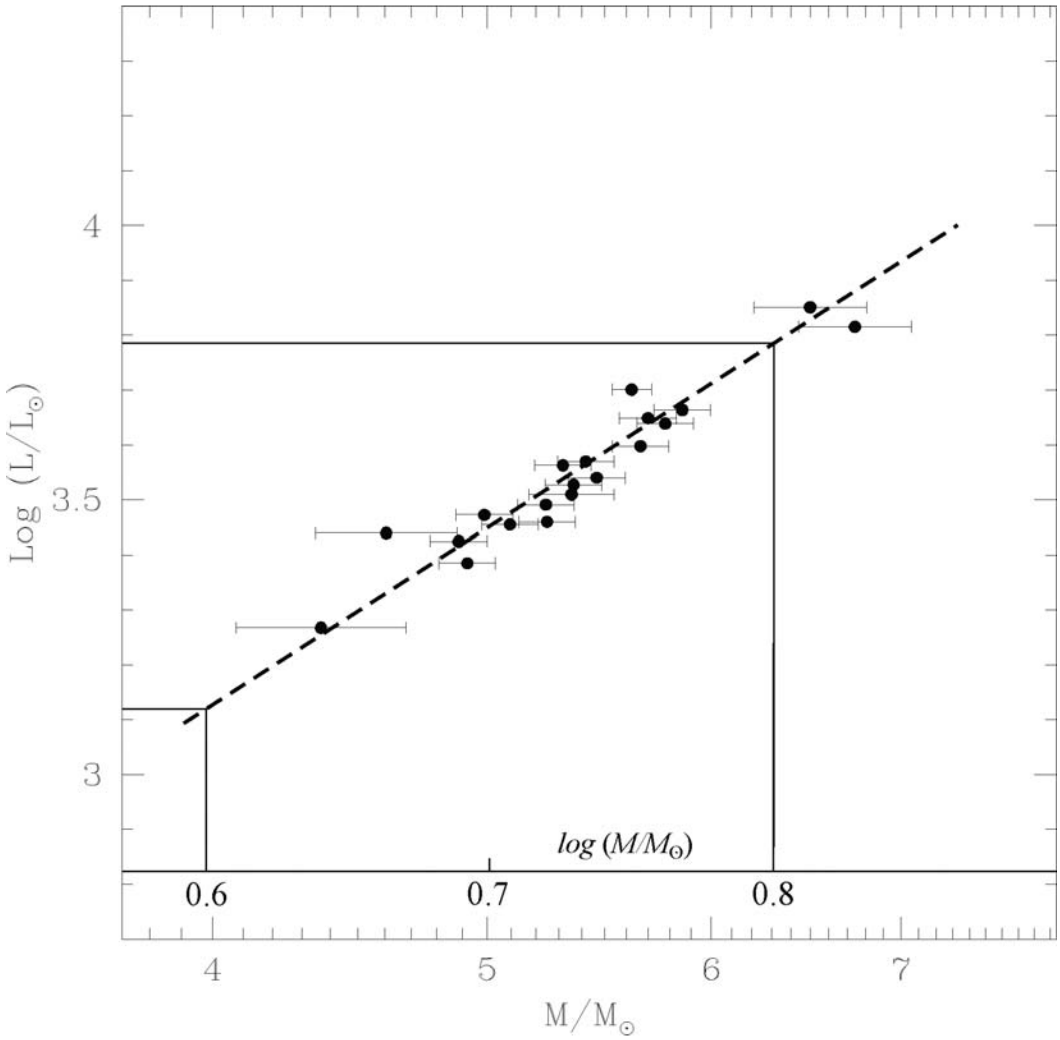
Пусть некоторая цефеида имеет массу M. По условию задачи, планета обращается вокруг нее с периодом τ, в 6000 раз большим периода пульсаций P. Выразим этот период в земных годах:

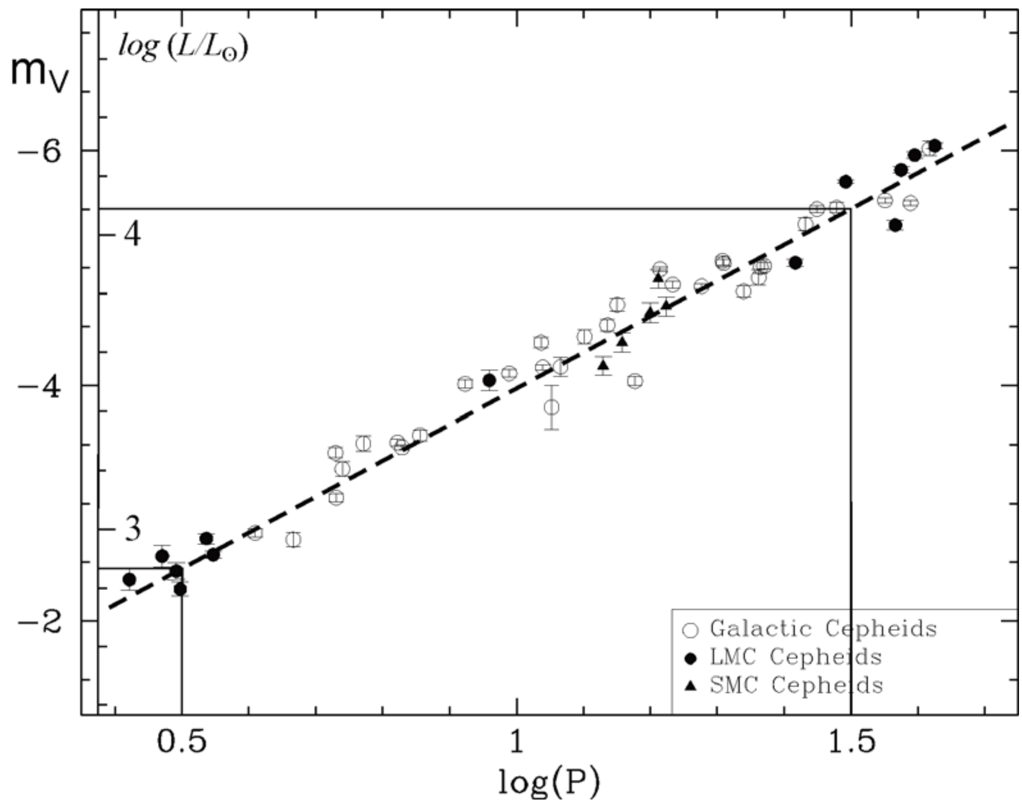
$$\tau = \frac{6000}{9\cdot 365}\left(\frac{M}{M_0}\right)^{2.75} = 1.8\cdot\left(\frac{M}{M_0}\right)^{2.75}.$$

Из III закона Кеплера выразим радиус орбиты планеты в астрономических единицах:

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{M}{M_0}\right)^{1/3}\tau^{2/3} = 1.5\cdot\left(\frac{M}{M_0}\right)^{2.16}$$

При фиксированном альбедо температура планеты в четвертой степени T^4 пропорциональна количеству энергии, поступающей на единицу площади планеты от звезды в единицу времени, то есть J/a^2. Сравним температуру планеты с температурой Земли T_0:


4
3.5
3
Log (L/L⊙)
log (M/M⊙)
0.6
0.7
0.8
4
5
6
7
M/M⊙


log (L/L⊙)
mV
−6
−4
−2
4
3
Galactic Cepheids
LMC Cepheids
SMC Cepheids
0.5
1
1.5
log(P)

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/4} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-1/2} = \frac{14^{1/4}}{1.5^{1/2}} \left(\frac{M}{M_0}\right)^{0.83} \left(\frac{M}{M_0}\right)^{-1.08} \sim 1.56 \left(\frac{M_0}{M}\right)^{1/4}.$$

Мы видим, что для всех классических цефеид температура планеты получается примерно одной и той же, мало меняясь с массой. Более того, она близка к температуре поверхности Земли T_0 (290 K). Если быть точнее, то для цефеид с массами от 4 до 8 масс Солнца мы получаем значения от 320 до 270 K соответственно. При массе в 6 масс Солнца температурные условия на планете будут похожи на земные.

Выше был приведен наиболее общий метод решения. Можно поступить другим способом, взяв несколько возможных значений массы цефеиды, определив по диаграммам ее светимость и период колебаний блеска. Затем можно определить характеристики планеты. Для того, чтобы установить указанную выше зависимость температуры от массы, в принципе, достаточно провести расчет для двух разных значений масс цефеиды. В таблице указаны результаты расчетов для пяти значений массы.

(M/M_0)	log (M/M_0)	log (L/L_0)	m_V	log P (сут)	τ, годы	(a/a_0)	T/T_0	T, K
4	0.60	3.13	–3.10	0.70	82	30.0	1.10	320
5	0.70	3.45	–3.90	0.97	152	48.6	1.04	302
6	0.78	3.71	–4.55	1.18	251	72.2	0.99	288
7	0.85	3.93	–5.10	1.37	383	100.8	0.96	277
8	0.90	4.12	–5.58	1.53	553	134.7	0.92	268

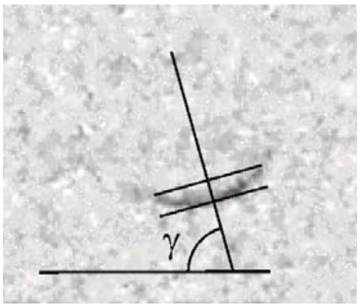
X.3 МОЛОДАЯ ЛУНА

О.С. Угольников

? На последней странице обложки приведена фотография (№1) очень молодого серпа Луны, сделанная ранней весной в Москве (широта +56°). Используя наиболее точный, по Вашему мнению, метод, определите по этой фотографии максимально возможное значение "возраста" серпа Луны (времени от последнего новолуния в сутках). Орбиту Луны считать круговой.

! Самым очевидным методом определения возраста Луны могло бы быть измерение ее фазы или толщины серпа. Однако, в данном случае этот метод не может быть точным – серп Луны очень тонок, искажен атмосферным дрожанием и флуктуациями измеренной яркости на отдельных пикселях фотокамеры. Прямые измерения толщины изображения серпа могут вызвать завышение фазы Луны, что в случае близости к новолунию приведет к сильной переоценке возраста.

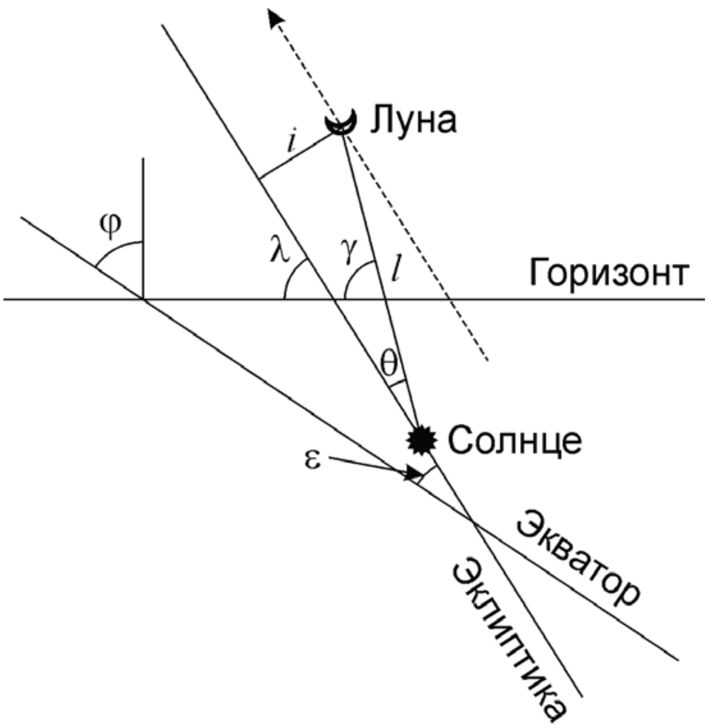
Другой возможный способ – измерить диаметр изображения Луны на фотографии и далее – ее высоту над горизонтом (около 5-6°). Но для вычисления возраста Луны нужно знать глубину погружения Солнца под горизонт, которую прямо по фотографии оценить достаточно трудно.



Однако, максимально возможный возраст Луны можно определить, учитывая ориентацию лунного серпа на небе. На фотографии мы видим, что серп направлен почти «рогами вверх», что может наблюдаться в тропических широтах, но нетипично для широты Москвы. Такое может случиться, только если Луна располагается существенно выше эклиптики, и направление «Солнце-Луна» образует большой угол с горизонтом. По фотографии мы можем определить этот угол γ, он равен 75°.

Предположим, что Луна находится на максимальном угловом расстоянии (i=5.15°) к северу от эклиптики и рассмотрим ее положение на небе относительно Солнца. Картина наблюдается вечером ранней весной, то есть Солнце расположено недалеко от точки весеннего равноденствия. Угол между вертикалью и проекцией небесного экватора на плоскость рисунка равен широте места φ. Эклиптика образует с горизонтом угол

$$\lambda = 90° - \varphi + \varepsilon = 57°.$$



Угол θ с вершиной в Солнце, образованный направлением на Луну и эклиптикой, равен

$$\theta = \gamma - \lambda = 18°.$$

Отсюда мы получаем угловое расстояние между Солнцем и Луной:

$$l = \frac{i}{\sin\theta} = 17^\circ.$$

Это максимальное значение расстояния l, так как мы взяли максимально возможное значение угла i. Угловая скорость синодического движения Луны (или движения Луны относительно Солнца) равна

$$\omega = \frac{360^\circ}{S} = 12.2^\circ\ /\text{сут}.$$

Здесь S – синодический период Луны. Наконец, максимальный возраст Луны равен

$$T = \frac{l}{\omega} = 1.4\ \text{сут}.$$

Отметим, что истинное значение возраста Луны в момент съемки составляло 1.1 суток.