ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

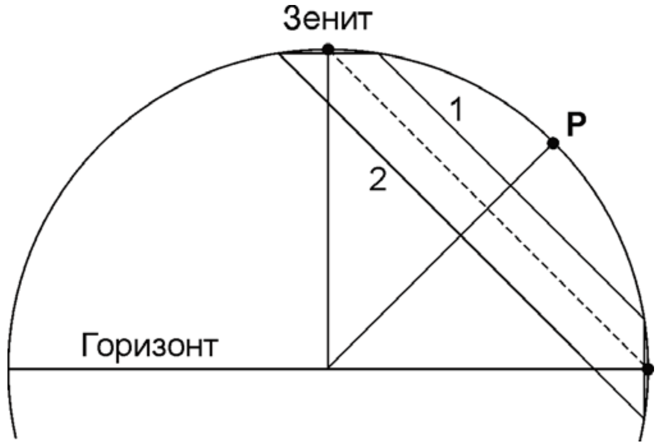
IX/X.1 СИНХРОННЫЕ КУЛЬМИНАЦИИ

О.С. Угольников

? Верхние кульминации двух далеких звезд происходят одновременно, при этом звезды располагаются симметрично относительно зенита. Во время нижней кульминации эти звезды располагаются симметрично относительно горизонта. Определите широту места наблюдения. Атмосферную рефракцию не учитывать.

! Очевидно, что раз верхние кульминации двух далеких звезд происходят одновременно, то и нижние кульминации произойдут одновременно, через половину звездных суток. В нижней кульминации положения звезд симметричны относительно горизонта, следовательно, одна из звезд расположена выше него. Значит, верхняя кульминация этой звезды тоже будет над горизонтом, ровно как и верхняя кульминация другой звезды, расположенной симметрично относительно зенита, на той же высоте. Изобразим проекцию небесной сферы на плоскость небесного меридиана.

Суточные пути двух звезд в этой проекции будут выглядеть как параллельные линии. Проведем еще одну линию, параллельную этим двум и находящуюся посередине между ними (пунктирную). Она также будет суточной параллелью некоторого объекта неба, у которого верхняя кульминация произойдет в зените, а нижняя – на горизонте. Такое может быть на широте ±45°. В этом можно убедиться также, взяв середину дуги меридиана между точками верхней и нижней кульминации любой из двух звезд. Эта точка **P** – один из полюсов мира – будет расположена на высоте 45°.



IX/X.2 ВСТРЕЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Е.Н. Фадеев

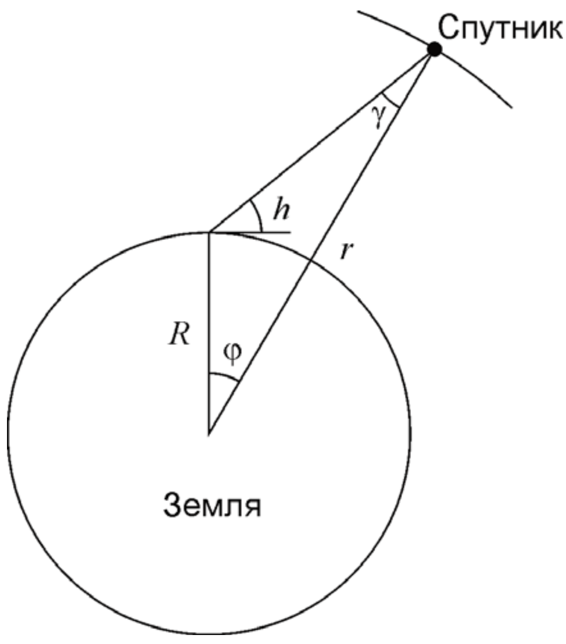
? Два спутника вращаются по круговым экваториальным орбитам вокруг Земли. Известно, что спутник 1 имеет радиус орбиты 18650 км (*10 класс*: горизонтальный параллакс 20º) и обратное движение (противоположно осевому вращению Земли), а спутник 2 – радиус орбиты 36700 км (*10 класс*: горизонтальный параллакс 10º) и прямое движение. Для наблюдателя на экваторе в некоторый момент времени спутники находятся в западной полусфере. Высота первого спутника 30°, высота второго спутника 60°. Какой из спутников раньше попадет в зенит и через какой промежуток времени? Атмосферной рефракцией пренебречь.

! Угловую скорость вращения спутника можно определить из III закона Кеплера:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}},$$

где M – масса Земли, r – радиус орбиты спутника. Если задан горизонтальный параллакс спутника p, то радиус и угловую скорость можно определить по формулам:

$$r = \frac{R}{\sin p}; \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}\sin^3 p}\,.$$



Для двух спутников, заданных в условии задачи, мы получаем $\omega_1 = 2.5{\cdot}10^{-4}$ с$^{-1}$ ~ ~ 51.5°/ч и $\omega_2 = 9.0{\cdot}10^{-5}$ с$^{-1}$ ~ 18.5°/ч. Зная высоту спутника над горизонтом (h), можно вычислить его геоцентрическое зенитное расстояние (см. рисунок):

$$\sin\gamma = \frac{R}{r}\cos h;$$

$$\varphi = 180^\circ - \gamma - (90^\circ + h) = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{R}{r}\cos h\right) - h = 90^\circ - \arcsin(\sin p\cos h) - h.$$

Получаем, что в системе координат, связанной с центром Земли, в начальный момент времени первый спутник отстоял от зенита на угол $\varphi_{01} = 43°$, а второй – на угол $\varphi_{02} = 25°$. Угловая скорость вращения Земли равна

$$\omega_0 = \frac{360^\circ}{T} = 15^\circ\,/\,\text{ч}.$$

Здесь T – продолжительность звездных суток. Очевидно, параллактическое смещение спутника не влияет на момент прохождения зенита, и мы можем далее решать задачу в геоцентрической системе. Тогда первый спутник движется относительно звезд к западу со скоростью ω_1. При этом зенит наблюдателя движется относительно звезд в противоположном направлении со скоростью ω_0. Значит, для того, чтобы попасть в зенит, спутнику необходимо зайти за горизонт на западе, а затем взойти на востоке. Для этого необходимо пройти угол $\varphi_1 = 360° - \varphi_{01} = 317°$. Спутник достигнет зенита через время

$$t_1 = \frac{\varphi_1}{\omega_1 + \omega_0} = 4.8\text{ ч.}$$

Второй спутник со скоростью ω_2 движется прямым движением в восточном направлении, и в том же направлении со скоростью ω_0 движется зенит наблюдателя. Поскольку $\omega_2 > \omega_0$, спутник будет медленно перемещаться по небу в восточном направлении. Чтобы попасть в зенит, спутнику надо преодолеть угловое расстояние $\varphi_2 = \varphi_{02} = 25°$. На это потребуется время

$$t_2 = \frac{\varphi_2}{\omega_1 - \omega_0} = 7.2\text{ ч.}$$

Итого, первый спутник достигнет зенита раньше. Произойдет это через 4.8 ч.

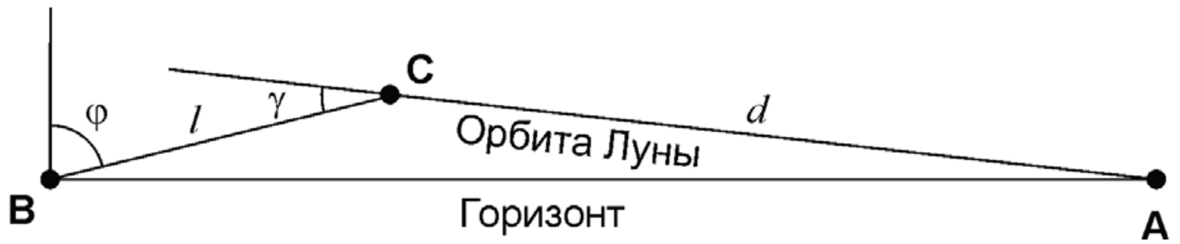
IX.3 ОПЕРЕЖАЮЩИЙ ВОСХОД

О.С. Угольников

? В некотором пункте Земли центр диска Луны взошел на 20 минут раньше по местному (среднему солнечному) времени, чем в предыдущие сутки, находясь в созвездии Рыб. Определите возможные значения широты этого пункта. Атмосферной рефракцией, суточным параллаксом Луны и эксцентриситетом ее орбиты пренебречь.

! Как известно, Луна движется по своей орбите с запада на восток и при наблюдении с большей части поверхности Земли каждый день восходит позже, чем накануне. Ситуация, описанная в условии задачи, может наступить только в приполярных районах нашей планеты, где продолжительность видимости Луны может резко изменяться даже за одни сутки. Так как Луна находится в созвездии Рыб и движется среди звезд на северо-восток, мы можем сделать вывод, что картина наблюдалась в северных полярных широтах. Чтобы решить задачу, изобразим положение Луны вблизи двух последовательных восходов (на обороте).

В первый день Луна появилась на горизонте в точке **A**. Через звездные сутки, когда орбита Луны заняла то же положение на небе, Луна уже находилась над горизонтом в точке **C**. Так как звездные сутки на 4 минуты короче солнечных, получаем, что с момента восхода Луны на второй день (точка **B**) прошло 16 минут. Пренебрегая орбитальным движением Луны за это время, получаем, что в ходе своего суточного движения (скорость 15° в час) Луна прошла путь l, равный 4°. Линия, по которой проходило это движение (**BC**), параллельна небесному экватору и достаточно близка к нему, так как Луна находится в созвездии Рыб.



Орбитальное перемещение Луны происходило вдоль линии **AC** (суточным параллаксом Луны мы пренебрегаем). Эта линия образует с небесным экватором (и линией **BC**) угол γ, который вблизи точки весеннего равноденствия может принимать значения от $\varepsilon - i$ до $\varepsilon + i$, где ε – угол наклона экватора к эклиптике (23.45°), а i – угол наклона орбиты Луны к эклиптике (5.15°). Численно это соответствует интервалу от 18.3° до 28.6°. Сама линия **BC** вблизи точки востока образует угол φ (широта места) с вертикалью. Величина суточного перемещения Луны по круговой орбите d равна $(360°/T) = 13.2°$ (здесь T – сидерический период обращения Луны). В треугольнике на рисунке угол **BAC** равен

$$\mathbf{BAC} = 180° - (90° - \varphi) - (180° - \gamma) = \varphi + \gamma - 90°.$$

Из теоремы синусов имеем

$$\frac{d}{\sin(90^{\circ} - \varphi)} = \frac{l}{\sin(\varphi + \gamma - 90^{\circ})};$$

$$\frac{d}{\cos\varphi} = \frac{l}{-\cos(\varphi + \gamma)} = \frac{l}{\sin\gamma \sin\varphi - \cos\gamma \cos\varphi}.$$

Отсюда

$$\sin\gamma \sin\varphi - (\cos\gamma + (l/d))\cos\varphi = 0.$$

В итоге,

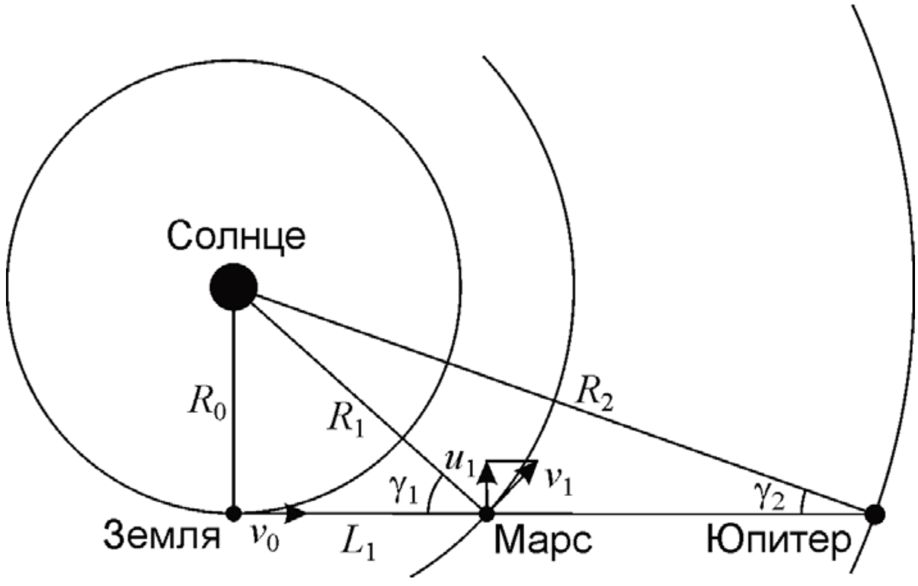
$$\varphi = \arctan\frac{\cos\gamma + (l/d)}{\sin\gamma}.$$

Подставляя границы интервала возможных значений угла γ, получаем интервал широт: от +68° до +76°. Отметим, что минимальное значение угла γ соответствует максимальной широте и наоборот.

IX.4 МАРС НА ДИСКЕ ЮПИТЕРА

О.С. Угольников

? Предположим, Вы стали свидетелем редчайшего явления для Земли: Марс, находясь в точке западной квадратуры, прошел по диаметру диска Юпитера. Сколько времени будет длиться это явление (вместе с частными фазами) в одном пункте нашей планеты? Эксцентриситетом и наклоном орбит планет к плоскости эклиптики, движением наблюдателя за счет осевого вращения Земли пренебречь.



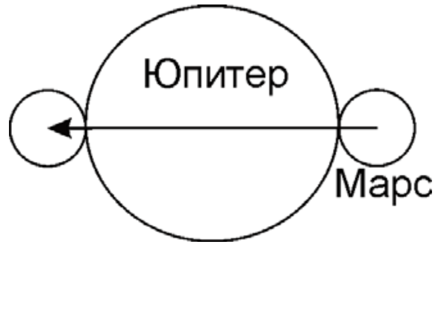
! Изобразим положение Земли, Марса и Юпитера в момент явления. Обе планеты находятся в западной квадратуре, Земля при наблюдении с кажой из них оказывается в наибольшей восточной элонгации. Нам нужно определить угловую скорость Марса и Юпитера в небе Земли. Собственная скорость Земли v_0 направлена вдоль прямой, соединяющей ее с планетами, и на их угловую скорость не влияет. Скорость Марса v_1 имеет составляющую u_1, перпендикулярную направлению на Землю. Угловая скорость Марса равна

$$\omega_1 = \frac{u_1}{L_1} = \frac{v_1 \cos\gamma_1}{R_1 \cos\gamma_1} = \frac{v_1}{R_1}.$$

Мы получили, что угловая скорость движения Марса по небу в момент квадратуры равна угловой скорости его движения по орбите. К этому выводу можно было прийти другим путем: Земля должна двигаться с той же угловой скоростью в небе Марса. Коль скоро она находится в наибольшей элонгации, ее угловая скорость равна угловой скорости Солнца. Она, в свою очередь, равна угловой скорости движения Марса по орбите. Аналогичные выводы мы можем сделать для угловой скорости Юпитера в небе Земли ω_2. Из III закона Кеплера имеем:

$$\omega_{1,2} = \frac{v_{1,2}}{R_{1,2}} = \omega_0 \left(\frac{R_0}{R_{1,2}} \right)^{3/2}.$$

Здесь ω_0 – угловая скорость движения Земли по орбите (0.986°/сутки). В момент прохождения Марс движется по небу относительно Юпитера с угловой скоростью ($\omega_1 - \omega_2$) и должен пройти дугу, равную сумме угловых диаметров планет ($\delta_1 + \delta_2$). В случае Юпитера нас интересует экваториальный диаметр, так как экватор Юпитера практически параллелен плоскости его орбиты. Продолжительность явления составит



$$T = \frac{\delta_1 + \delta_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\dfrac{d_1}{\sqrt{R_1^2 - R_0^2}} + \dfrac{d_2}{\sqrt{R_2^2 - R_0^2}}}{\omega_0\left(\left(\dfrac{R_0}{R_1}\right)^{3/2} - \left(\dfrac{R_0}{R_2}\right)^{3/2}\right)} = \frac{(d_1 / R_0)(a_1^2 - 1)^{-1/2} + (d_2 / R_0)(a_2^2 - 1)^{-1/2}}{\omega_0(a_1^{-3/2} - a_2^{-3/2})}.$$

Здесь a_1 и a_2 – радиусы орбит Марса и Юпитера в астрономических единицах. Подставляя численные значения, получаем 41 минуту.

IX.5 ВИЗИТ КОМЕТЫ

М.И. Волобуева

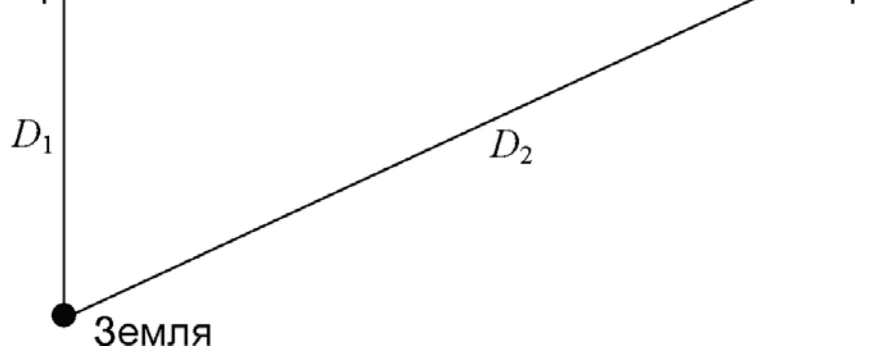
? 17 января 2016 года комета C/2013 US10 (Каталина) приблизилась к Земле на минимальное расстояние. При этом ее горизонтальный параллакс составил 12.0″. 18 марта того же года параллакс кометы был равен 4.0″. С какой средней пространственной скоростью относительно Земли двигалась комета за этот период?

! Находим расстояния от Земли до кометы в указанные моменты времени:

$$D_{1,2} = R / \sin p_{1,2}$$

Здесь R – радиус Земли, $p_{1,2}$ – параллаксы кометы в оба момента времени. Учитывая малость углов параллакса, их синусы можно заменить значениями самих углов в радианах. Мы получаем расстояние 0.73 а.е. для 17 января и 2.20 а.е. для 18 марта. Промежуток времени T между этими моментами составляет 61 день. Так как нас интересует средняя скорость движения кометы относительно Земли, а указанный промежуток времени существенно меньше одного года, будем считать путь кометы прямой линией. Учтем, что 17 января комета приблизилась к Земле на минимальное расстояние, то есть ее геоцентрическая траектория была перпендикулярна направлению на Землю. Средняя геоцентрическая скорость кометы равна

$$v = \frac{L}{T} = \frac{\sqrt{D_2^2 - D_1^2}}{T} = 59 \text{ км/с}.$$



IX.6 ЗВЕЗДНЫЕ ВОЙНЫ

М.И. Волобуева

? Желая внушить страх сторонникам Сопротивления, Новый Орден, преемник Галактической Империи, с помощью базы «Старкиллер» уничтожил планетную систему Хосниан, в которой располагалась столица Новой Республики Хосниан-Прайм. Получившаяся вспышка была настолько яркой, что была видна на планетах других систем даже днем. Например, на Токадане взрыв самой маленькой из планет выглядел как вспышка с блеском -8^m. Найдите суммарную видимую звездную величину вспышки на Токадане, если известно, что в системе Хосниан было четыре планеты с одинаковыми плотностями, а их радиусы соотносились как 1:2:3:4. Считать, что мощность взрыва пропорциональна массе планеты, а его длительность на всех планетах одинакова.

! Плотности планет равны, значит отношение масс планет равно отношению кубов их радиусов. Мощность взрыва самой маленькой из планет меньше суммарной мощности взрыва всей системы в

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)/1^3 = 100 \text{ раз.}$$

Так как расстояния между взорвавшимися планетами гораздо меньше расстояния до других планетных систем, то можно считать, что все планеты находятся на одинаковом расстоянии от Токадана, и суммарная вспышка будет там также в 100 раз ярче, чем взрыв наименьшей из планет. Разница в блеске в 100 раз соответствует пяти звездным величинам. В итоге получаем:

$$m = -8^m - 5^m = -13^m.$$