10 класс

10.1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей? (*А. Грибалко*)

Ответ. Нет, не сможет.

Решение. Пусть x и y — общее число матчей, сыгранных внутри Восточной и Западной конференций соответственно, а z — число матчей между командами разных конференций. Нам надо доказать, что равенство $z = \dfrac{x+y+z}{2}$ невозможно.

Каждая из k команд Восточной конференции участвует в 82 играх; значит, $82k = 2x + z$ (коэффициент 2 появился из-за того, что каждый внутренний матч учтён у обеих участвовавших в нём команд). Отсюда число $z = 82k - 2x$ чётно. Но из подсчёта общего числа матчей $x + y + z = \dfrac{30 \cdot 82}{2}$ следует, что число $\dfrac{x+y+z}{2} = 15 \cdot 41$ нечётно. Значит, равенство $z = \dfrac{x+y+z}{2}$ не может выполняться.

10.2. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD. (*А. Кузнецов*)

Решение. Выберем на прямой QP точку T такую, что $DT \perp DA$ (см. рис. 3). Поскольку $\angle APT = 90^\circ = \angle ADT$, точки A, P, D и T лежат на одной окружности. Значит, центр окружности ω_1, описанной около треугольника APD, лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку DT.

Так как четырехугольник $ABCD$ вписан, имеем $\angle QBD = \angle PAD$. Четырехугольник $APDT$ также вписан, откуда $\angle PAD = \angle QTD$. Итак, $\angle QBD = \angle PAD = \angle QTD$; значит, точки B, Q, D и T лежат на одной окружности. Поэтому центр окружности ω_2, описанной около треугольника BQD, также лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку DT.

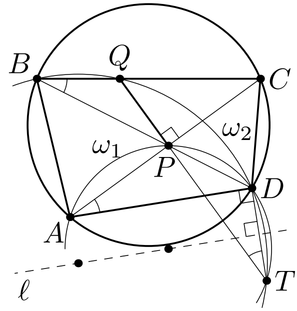

Рис. 3

Таким образом, прямая ℓ проходит через центры ω_1 и ω_2. Поскольку $\ell \perp DT$ и $AD \perp DT$, получаем $\ell \parallel AD$, что и требовалось.

10.3. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* тройку различных чисел (a, b, c) таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.

(*А. С. Голованов*)

Решение. Предположим противное; тогда у каких-то четырёх циклов (a_i, b_i, c_i) суммы чисел одинаковы и равны некоторому s. Для каждого из этих циклов имеем

$$s = a_i + b_i + c_i = a_i + f(a_i) + f(f(a_i)) = \\ = b_i + f(b_i) + f(f(b_i)) = c_i + f(c_i) + f(f(c_i)).$$

Итак, все 12 чисел наших четырёх циклов — корни многочлена $g(x) = x + f(x) + f(f(x)) - s$. Однако все эти 12 чисел по условию различны, а степень многочлена $g(x)$ равна 9; значит, у него не может быть больше 9 различных корней. Противоречие.

10.4. Внутри выпуклого 100-угольника выбрана точка X, не лежащая ни на одной его стороне или диагонали. Исходно вершины многоугольника не отмечены. Петя и Вася по очереди отмечают ещё не отмеченные вершины 100-угольника, причём Петя начинает и первым ходом отмечает сразу две вершины, а далее каждый своим очередным ходом отмечает по одной вершине. Проигрывает тот, после чьего хода точка X будет лежать внутри многоугольника с отмеченными вершинами. Докажите, что Петя может выиграть, как бы ни ходил Вася. (*С. Берлов, Ф. Петров*)

Решение. Раскрасим стороны 100-угольника в чёрный и белый цвета так, чтобы любые две соседних стороны имели разные цвета. Рассмотрим две одноцветных стороны AB и CD, образующие выпуклый четырёхугольник $ABCD$; пусть его диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Предположим, что точка X лежит в треугольнике KBC (см. рис. 4). Покажем, как Петя может выиграть в этом случае.

Пусть он выберет первым ходом вершины B и C. После этого оба игрока могут выбирать только вершины, лежащие в другой полуплоскости от прямой BC, нежели точка X. Этих вершин чётное число, поскольку они разбиваются на пары вершин, образующих стороны того же цвета, что и AB. Поэтому последний ход будет за Петей.

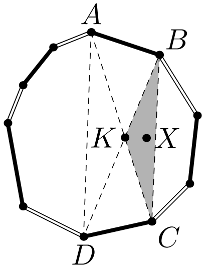

Рис. 4

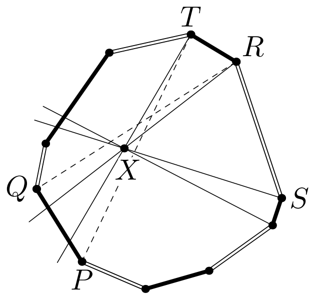

Рис. 5

Осталось показать, что такие стороны AB и CD найдутся. Пусть это не так. Рассмотрим любую вершину T. Предположим, что луч TX пересекает чёрную сторону PQ (см. рис. 5). Пусть TR — чёрная сторона, выходящая из T; можно считать, что $TRPQ$ — выпуклый четырёхугольник. Если точка X лежит внутри треугольника TRQ, то требуемый четырёхугольник $RTQP$ найден; в противном случае луч RX тоже должен пересекать отрезок PQ.

Пусть RS — следующая за TR сторона 100-угольника. Если луч SX пересекает белую сторону, то аналогично доказывается, что луч RX также должен её пересекать, что не так. Значит, SX пересекает какую-то чёрную сторону, и можно повторить предыдущие рассуждения для вершины S. Рассуждая так и дальше, мы получим, что для каждой чёрной стороны $T'R'$ найдётся чёрная сторона $P'Q'$, которую пересекают оба луча $T'X$ и $R'X$. Однако это неверно для чёрной стороны PQ (лучи PX и QX пересекают участки контура QT и RP соответственно) — противоречие.