Условия и решения задач

9 класс

9.1. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a \times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера $a \times b$ считать ковром размера $b \times a$.) (*Г. Жуков*)

Ответ. Обманывает.

Решение. Назовём ковёр, все стороны которого больше 1, *большим*, а ковёр, все стороны которого меньше 1, — *маленьким*. Таким образом, изначально у путешественника был один большой ковёр. Докажем, что общее число больших и маленьких ковров у путешественника не уменьшается; отсюда следует, что описанная ситуация невозможна. Для этого достаточно рассмотреть только случай, когда путешественник отдаёт меняле большой или маленький ковёр.

При обменах первого вида большой ковёр меняют на маленький, а маленький — на большой. Поэтому общее количество больших и маленьких ковров не уменьшается.

Рассмотрим обмены второго вида. При обмене большого ковра $a \times b$ путешественник получит ковры $a_1 \times b$ и $a_2 \times b$. Если $0 < a_1, a_2 \leqslant 1$, то $a = a_1 a_2 \leqslant 1$, что неверно. Учитывая неравенство $b > 1$, получим, что хотя бы один из новых ковров будет большим. Аналогично, при обмене маленького ковра хотя бы один из новых ковров будет маленьким. Значит, при таком обмене общее количество больших и маленьких ковров также не уменьшается.

9.2. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S

и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

(*И. Богданов, П. Кожевников*)

Решение. Если $\ell \parallel BC$, утверждение очевидно в силу симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC.

Пусть теперь прямые ℓ и BC пересекаются в точке X (см. рис. 1). Из параллельности получаем $\frac{XB}{XT} = \frac{XK}{XL} = \frac{XS}{XC}$, откуда $XT \cdot XS = XB \cdot XC$. Поскольку точки B, C, P и Q лежат на ω, имеем $XB \cdot XC = XP \cdot XQ$. Получаем, что $XT \cdot XS = XP \cdot XQ$; это и означает, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

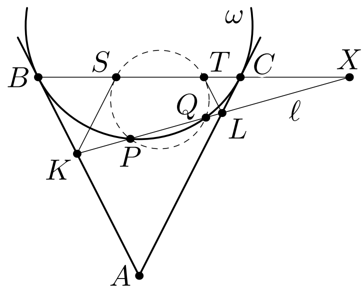


Рис. 1

Замечание. Можно показать, что полученная окружность касается прямых KS и LT в точках S и T соответственно.

9.3. Саша выбрал натуральное число $N > 1$ и выписал в строчку в порядке возрастания все его натуральные делители: $d_1 < \ldots < d_s$ (так что $d_1 = 1$ и $d_s = N$). Затем для каждой пары стоящих рядом чисел он вычислил их наибольший общий делитель; сумма полученных $s-1$ чисел оказалась равной $N-2$. Какие значения могло принимать N? (*А. Кузнецов*)

Ответ. $N = 3$.

Решение. Заметим сразу, что $d_{s+1-i} = N/d_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, s$.

Число $d_{i+1} - d_i$ делится на НОД(d_i, d_{i+1}), так что НОД$(d_i, d_{i+1}) \leqslant d_{i+1} - d_i$. При $i = 1, \ldots, s-1$ обозначим $r_i = (d_{i+1} - d_i) - \text{НОД}(d_i, d_{i+1}) \geqslant 0$. Согласно условию,

$$(d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \ldots + (d_s - d_{s-1}) = d_s - d_1 = N - 1$$

и

$$\text{НОД}(d_1, d_2) + \text{НОД}(d_2, d_3) + \ldots + \text{НОД}(d_{s-1}, d_s) = N - 2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $r_1 + \ldots + r_{s-1} = 1$. Это означает, что $r_k = 1$ для некоторого k, а все остальные r_i равны нулю.

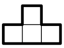
Итак, $1 = (d_{k+1} - d_k) - \text{НОД}(d_k, d_{k+1})$. Правая, а потому и левая часть этого равенства делится на $\text{НОД}(d_k, d_{k+1})$, поэтому $\text{НОД}(d_k, d_{k+1}) = 1$ и $d_{k+1} - d_k = 2$. Это возможно, только если каждое из чисел d_k и d_{k+1} нечётно.

Так как d_k и d_{k+1} — два последовательных делителя числа N, то $\dfrac{N}{d_{k+1}}$ и $\dfrac{N}{d_k}$ — тоже два последовательных делителя числа N. Поэтому, если $\dfrac{N}{d_{k+1}} = d_m$, то $\dfrac{N}{d_k} = d_{m+1}$. При этом

$$\text{НОД}(d_m, d_{m+1}) = \frac{N}{\text{НОК}(d_k, d_{k+1})} = \frac{N \cdot \text{НОД}(d_k, d_{k+1})}{d_k d_{k+1}} < \\ < \frac{N(d_{k+1} - d_k)}{d_k d_{k+1}} = d_{m+1} - d_m.$$

Значит, $r_m > 0$, что возможно лишь при $k = m$ (и, следовательно, $s = 2k$).

Итак, $d_{k+1} = \dfrac{N}{d_k}$, то есть число $N = d_k d_{k+1}$ нечётно. Но тогда $d_{s-1} \leqslant \dfrac{N}{3}$, откуда $\text{НОД}(d_{s-1}, d_s) \leqslant d_{s-1} \leqslant \dfrac{N}{3}$. Следовательно, $1 \geqslant r_{s-1} \geqslant \dfrac{2N}{3} - \dfrac{N}{3} = \dfrac{N}{3}$, т. е. $N \leqslant 3$. Поскольку $N > 1$, получаем единственно возможное значение $N = 3$, которое, как легко убедиться, удовлетворяет условию.

9.4. Из клетчатого бумажного квадрата 100×100 вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырёхклеточную фигурку вида  — возможно, повёрнутую. (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что её получилось вырезать.) (*С. Берлов*)

Первое решение. Представим себе, что доминошки (прямоугольники 1×2) ещё не вырезаны, и будем вырезать их по одной. В каждый момент процесса назовём *ценой* ещё не вырезанной клетки число её невырезанных соседей по стороне, уменьшенное на 2 (например, цена неугловой клетки, лежащей на границе квадрата, изначально равна 1). Тогда исходная цена каждой клетки есть $2 - t$, где t — количество отрезков периметра квадрата, находящихся на границе этой клетки. Значит, исходная суммарная цена всех клеток равна $2 \cdot 100^2 - 400 = 19\,600$.

Проследим, как изменяется суммарная цена S всех невырезанных клеток после вырезании доминошки. При этом выкидываются две клетки (сумма цен которых не превосходит $2+2=4$), а также уменьшаются на 1 цены клеток, граничащих с доминошкой (которых не больше шести). Поэтому после вырезания доминошки S уменьшается не более, чем на 10.

Итак, после вырезания 1950 доминошек S станет не меньше, чем $19\,600 - 1950 \cdot 10 = 100$. Значит, найдётся невырезанная клетка k, цена которой положительна. Это значит, что у k не менее трёх невырезанных соседей. Тогда k вместе с этими тремя соседями образует требуемую фигурку.

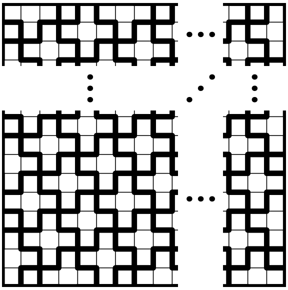


Рис. 2

Второе решение. Назовём требуемую фигурку T-*тетрамино*.

Мысленно разобьём наш квадрат на фигурки (см. рис. 2). Нетрудно подсчитать, что вне «полных» крестов окажется ровно $4 \cdot 100 = 400$ клеток, из которых 320 будут находиться в T-тетрамино разбиения. Итого, в разбиении есть $(100^2-400)/5 = 1920$ полных крестов и ещё 80 T-тетрамино.

Рассмотрим теперь, куда попадают клетки вырезанных доминошек. Предположим, что из каждого полного креста было вырезано хотя бы по две клетки, а из каждого T-тетрамино разбиения — хотя бы одна. Тогда общее число вырезанных клеток было бы не меньше, чем $1920 \cdot 2 + 80 = 2 \cdot 1960$, что неверно.

Значит, либо из некоторого T-тетрамино не вырезано ни одной клетки, либо из некоторого креста вырезано не более одной клетки. В первом случае мы уже нашли T-тетрамино, которое можно вырезать. Во втором же случае, если из креста и вырезана одна клетка, то она не может быть центральной (иначе вторая клетка той же доминошки также лежала бы в кресте). Значит, даже если клетка креста вырезана, остаток его как раз и является T-тетрамино. В обоих случаях мы добились требуемого.