Условия и решения задач

9 класс

9.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

(*Н. Агаханов*)

Ответ. На 8 нулей.

Решение. Покажем, что сумма не может оканчиваться на 9 нулей. Каждое из составленных чисел делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9. Поэтому их сумма также делится на 9. Наименьшее натуральное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на девять нулей, равно $9 \cdot 10^9$, так что сумма наших чисел не меньше $9 \cdot 10^9$. Значит, одно из них не меньше 10^9, что невозможно.

Осталось показать, как составить числа, сумма которых оканчивается на восемь нулей. Например, можно взять восемь чисел, равных 987654321, и одно число 198765432. Их сумма равна $81 \cdot 10^8$.

9.6. Квадрат разбит на $n^2 \geqslant 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные $n-1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув). (*С. Берлов*)

Решение. Назовём пару прямоугольников *вложимой*, если один из них можно вложить в другой.

Пусть горизонтальная сторона квадрата разбилась на отрезки длин $a_1, \ldots, a_n$ (слева направо), а вертикальная — на отрезки длин $b_1, \ldots, b_n$ (сверху вниз). Переставив «столбцы» и «строки», можно считать, что $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Обозначим через $Q_{i,j}$ прямоугольник разбиения со сторонами a_i и b_j. Заметим, что при $i \leqslant k$ и $j \leqslant \ell$ пара $Q_{i,j}$ и $Q_{k,\ell}$ вложима.

Поскольку $a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$, найдутся различные индексы i и j такие, что $a_i \geqslant b_i$ и $a_j \leqslant b_j$. Можно считать, что $i < j$. Тогда существует индекс $k \in [i, j]$ такой, что $a_k \leqslant b_k$ и $a_{k-1} \geqslant b_{k-1}$.

Мы утверждаем, что можно выбрать следующие прямоугольники: $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $\ldots$, $Q_{1,k-1}$, $Q_{2,k-1}$, $\ldots$, $Q_{k,k-1}$, вкупе с $Q_{k-1,k}$, $Q_{k,k}$, $\ldots$, $Q_{k,n}$, $Q_{k+1,n}$, $\ldots$, $Q_{n,n}$ (см. рис. 1). Их количество равно $2(k-1)+2(n-k+1) = 2n$. Любая пара из них, кроме $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$, вложима по замечанию выше. Наконец, оставшаяся пара также вложима, поскольку $a_k \leqslant b_k$ и $b_{k-1} \leqslant a_{k-1}$ (для вложения один прямоугольник нужно повернуть на 90°).

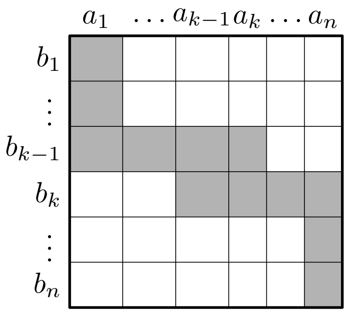

Рис. 1

9.7. Окружность ω вписана в треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке $A'A$ так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.

(*И. Митрофанов*)

Решение. Будем считать, что точка Y лежит ближе к точке B, нежели Z; кроме того, считаем, что сторона BC горизонтальна, а A лежит выше неё (см. рис. 2).

Обозначим через ω_A вневписанную окружность треугольника ABC, касающуюся стороны BC, а через ω' — вневписанную окружность треугольника XYZ, касающуюся стороны XZ. Пусть ω касается BC в точке A''. Обозначим через T точку пересечения AA' и ω, лежащую ближе к A. Гомотетия с центром A, переводящая ω в ω_A, переводит T в A'; значит, касательная к ω в T параллельна BC.

Поскольку окружности ω и ω' вписаны в вертикальные углы, образованные прямыми XY и XZ, существует гомотетия с центром в X (и отрицательным коэффициентом), переводящая ω в ω'. Пусть при этой гомотетии точка T переходит в точку T'. Тогда T' лежит на прямой AA', касательная к ω' в T' параллель-

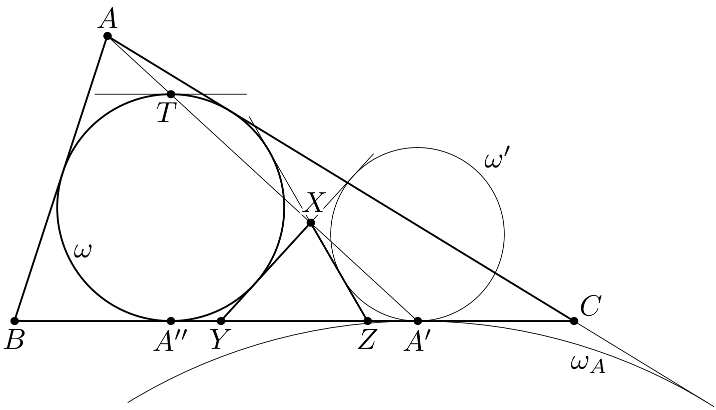

Рис. 2

на BC, и ω' лежит выше этой касательной. Такая касательная к ω' — это прямая BC; значит, T' лежит на BC, то есть ω' касается BC в точке A'.

Обозначим полупериметр треугольника XYZ через p. Так как окружности ω и ω' — вневписанные для этого треугольника, имеем $ZA' = YA'' = p - YZ$. Значит,

$$XY+XZ = 2p-YZ = 2(p-YZ)+YZ = ZA'+YZ+YA'' = A'A'',$$

что не зависит от выбора точки X.

Замечание. Тот факт, что ω' касается BC в точке A', можно также доказать, применив теорему о трёх гомотетиях к окружностям ω, ω_A и ω'. Центры гомотетий, переводящих их друг в друга, есть A, X и некоторая точка Q, лежащая на BC (так как BC — внутренняя общая касательная к ω_A и ω'). Получаем, что Q лежит на прямой AX, то есть совпадает с A'. Поскольку ω_A касается BC в $Q = A'$, то и ω' также касается BC в этой же точке.

9.8. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}\,.$$

(*А. Храбров*)

Решение. Домножив доказываемое неравенство на $a^2b^2c^2d^2$, получим

$$a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2 \leqslant 1. \qquad (*)$$

Поскольку неравенство симметричное, можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. По неравенству о средних для чисел a, b и $(c+d)$ имеем
$$ab(c+d) \leqslant \left(\frac{a+b+(c+d)}{3}\right)^3 = 1.$$
Следовательно, $a^2b^2(c+d)^2 \leqslant 1$.

Значит, для доказательства $(*)$ достаточно показать, что
$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2(c+d)^2.$$
После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых остаётся неравенство
$$a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leqslant 2a^2b^2cd,$$
которое является суммой двух очевидных неравенств $a^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2cd$ и $b^2c^2d^2 \leqslant a^2b^2cd$.

Замечание. Если допустить неотрицательные значения переменных, то в неравенстве $(*)$ равенство достигается лишь тогда, когда три числа равны 1 и одно равно 0.