11 класс

11.1. Существует ли такое натуральное число n, большее 1, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом?

Ответ: да, существует.

Решение. Например, $n = 2^8 = 256$.

Действительно, $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} = \sqrt{n\sqrt{n \cdot n^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{n\sqrt{n^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{n \cdot n^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{n^{\frac{7}{4}}} = n^{\frac{7}{8}}$. Тогда, при $n = 2^8$ значение данного выражения равно $\left(2^8\right)^{\frac{7}{8}} = 2^7 = 128$.

Возможны и другие примеры: любые числа, являющиеся восьмой степенью произвольного натурального числа, отличного от 1.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведен верный пример, но не показано вычислением, что он подходит*

$-$ *приведен только ответ* («*да*» *или* «*нет*»)

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.2. Существуют ли такие целые числа p и q, что при любых целых значениях x выражение $x^2 + px + q$ кратно 3?

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Предположим, что такие p и q существуют. Тогда:

1) если $x = 0$, то $x^2 + px + q = q$ кратно 3;

2) если $x = 1$, то $x^2 + px + q = 1 + p + q$ кратно 3;

3) при $x = -1$, то $x^2 + px + q = 1 - p + q$ кратно 3.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Из 1), 2) и 3) следует, что $q + (1 + p + q) + (1 - p + q) = 3q + 2$ кратно 3, что невозможно ни при каких целых значениях q.

Второй способ. Из 2) и 3) следует, что $(1 + p + q) + (1 - p + q) = 2q + 2$ кратно 3, что невозможно, так как q кратно 3.

Можно также рассматривать не конкретные значения x, а возможные остатки от деления x на 3, *проведя, например, такое рассуждение: если x делится на* 3, *то значение трехчлена кратно трем только в том случае, когда q делится на* 3. *Если же x не делится на* 3, *то, учитывая, что q должно делиться на* 3, *на* 3 *должно делиться и* $(x+p)$. *Но число p — фиксировано, а число x может при делении на* 3 *давать различные остатки* (1 *или* 2), *поэтому найдется значение x, для которого* $(x + p)$ *на* 3 *не делится.*

Отметим также, что из второго способа решения видно, что в условии задачи можно заменить 3 *на любое натуральное число, большее трех.*

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *присутствует идея рассмотрения остатков от деления x на* 3, *но решение не доведено до конца или в нем допущены вычислительные ошибки*

$-$ *приведен только ответ* («*да*» *или* «*нет*») *или ответ, полученный рассмотрением конкретных значений p и q*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.3. В квадрате $ABCD$ точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Что больше: площадь треугольника AGF или площадь четырехугольника $GECF$?

Ответ: $S_{AFG} > S_{CEGF}$.

Решение. Обозначим площадь треугольника AGF через S_1, а площадь четырехугольника $GECF$ через S_2 (см. рис. 11.3 а, б). Пусть площадь квадрата равна S, тогда $S_1 + S_2 + S_{ABE} + S_{ADF} = S$.

Учитывая, что $S_{ABE} = S_{ADF} = \dfrac{1}{4}S$, получим: $S_1 + S_2 = \dfrac{1}{2}S$. Далее можно рассуждать по-разному.

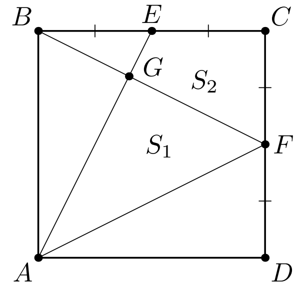

Рис. 11.3а

Первый способ. Составим и преобразуем разность: $S_1 - S_2 = \left(\frac{1}{2}S - S_2\right) - S_2 = 2\left(\frac{1}{4}S - S_2\right) = 2(S_{BCF} - S_2) > 0$ (см. рис. 11.3а). Следовательно, $S_1 > S_2$, то есть $S_{AFG} > S_{CEGF}$.

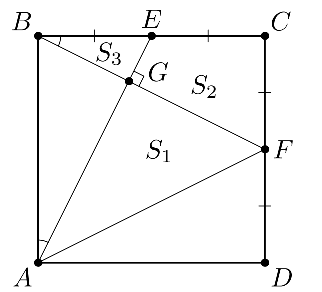

Рис. 11.3б

Второй способ. Пусть сторона квадрата равна $2a$, то есть, $S = 4a^2$. Тогда $S_1 + S_2 = 2a^2$. Найдем $S_3 = S_{BEG}$ (см. рис. 11.3б). Заметим, что прямоугольные треугольники ABE и BCF равны (по двум катетам). Пусть $\angle ABE = \angle BCF = \alpha$. тогда $\angle ABG = 90^\circ - \alpha$, значит, $AE \perp BF$.

Из треугольника ABE: $AE = a\sqrt{5}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $BG = AB\sin\alpha = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Тогда $S_3 = \frac{1}{2}BE \cdot BG \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{5}$.

Следовательно, $S_2 = S_{BCF} - S_3 = a^2 - \frac{a}{5} = \frac{4a^2}{5}$. Тогда $S_1 = 2a^2 - S_2 = \frac{6a^2}{5}$. Таким образом, $S_1 > S_2$, то есть $S_{AFG} > S_{CEGF}$.

Возможны также рассуждения, которые позволяют выразить S_1 и S_2 через сторону квадрата, использующие подобие, теорему Менелая, и пр.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

$\mp$ *использовано, но не доказано, что AE и BF перпендикулярны*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.4. Решите неравенство: $\sin\frac{x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x}\cos\frac{x}{x^2+1} > 0$.

Ответ: $(0; +\infty)$.

Решение. 1) Заметим, что $x \neq 0$ и $t = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$. Так как $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$, то $|t| \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, аргумент t на единичной окружности лежит в I или в IV координатной четверти.

2) Если $x > 0$, то $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, то есть t лежит в I четверти, поэтому $\sin t > 0$ и $\cos t > 0$. Кроме того, $\frac{1}{t} > 0$, значит, $\sin t + \frac{1}{t}\cos t > 0$.

Таким образом, при всех $x > 0$ исходное неравенство верно.

3) Если $x < 0$, то $-\frac{1}{2} \leqslant t < 0$, то есть t лежит в IV четверти, поэтому $\sin t < 0$ и $\cos t > 0$. Кроме того, $\frac{1}{t} < 0$, значит, $\sin t + \frac{1}{t}\cos t < 0$.

Таким образом, при всех $x < 0$ исходное неравенство неверно.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$\mp$ *доказано, что неравенство выполняется при $x > 0$, но не доказано, что при $x < 0$ оно не выполняется*

$\mp$ *доказано, что неравенство не выполняется при $x < 0$, но не доказано, что при $x > 0$ оно выполняется*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.5. Каждая боковая грань пирамиды является прямоугольным треугольником, в котором прямой угол примыкает к основанию пирамиды. В пирамиде проведена высота. Может ли она лежать внутри пирамиды?

Ответ: нет, не может.

Решение. Пусть основанием пирамиды $SA_1 \dots A_n$ является многоугольник $A_1 \dots A_n$ (см. рис. 11.5а, б). Возможны два случая.

1) Соседние углы в двух соседних боковых гранях — прямые.

Пусть, например, $\angle SA_2A_1 = \angle SA_2A_3 = 90^\circ$ (см. рис. 11.5а). Тогда, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $SA_2 \perp A_1A_2A_3$, то есть, SA_2 — высота пирамиды, и она принадлежит боковой поверхности пирамиды.

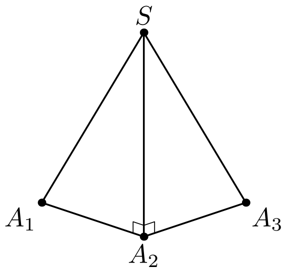

Рис. 11.5а

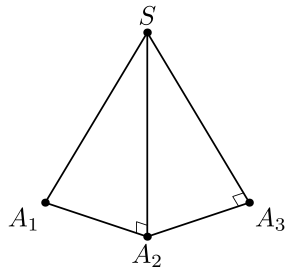

Рис. 11.5б

2) В любых двух соседних боковых гранях прямые углы не имеют общей вершины.

Пусть в прямоугольных треугольниках SA_nA_1, SA_1A_2, ..., $SA_{n-1}A_n$ вершинами прямых углов являются точки A_1, A_2, ..., A_n соответственно (см. рис. 11.5б). Воспользуемся тем, что в любом прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. Тогда, из треугольника SA_1A_2: $SA_1 > SA_2$, из треугольника SA_2A_3: $SA_2 > SA_3$, и так далее.

Записав аналогичные неравенства для каждой боковой грани, получим: $SA_1 > SA_2 > \ldots > SA_n > SA_1$, то есть, $SA_1 > SA_1$ — противоречие. Следовательно, такое расположение прямых углов в боковых гранях невозможно.

Таким образом, внутри данной пирамиды высота лежать не может.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$\pm$ *полностью и обоснованно разобран только случай* 2)

$\mp$ *приведен верный ответ, но обоснованно разобран только случай* 1)

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.6. Каждая клетка таблицы размером 7×8 (7 строк и 8 столбцов) покрашена в один из трех цветов: красный, желтый или зеленый. При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем желтых и не меньше, чем зеленых, а в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зеленых. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице?

Ответ: 8.

З	**З**	**Ж**	**К**	**Ж**	**К**	**Ж**	**К**
К	**Ж**	**З**	**З**	**К**	**Ж**	**К**	**Ж**
Ж	**К**	**К**	**Ж**	**З**	**З**	**Ж**	**К**
К	**Ж**	**Ж**	**К**	**Ж**	**К**	**З**	**З**
Ж	**К**	**К**	**Ж**	**К**	**Ж**	**К**	**Ж**
К	**Ж**	**К**	**Ж**	**К**	**Ж**	**К**	**Ж**
Ж	**К**	**Ж**	**К**	**Ж**	**К**	**Ж**	**К**

Решение. 1) В каждой строке таблицы красных клеток не меньше, чем желтых, следовательно, и во всей таблице красных клеток не меньше, чем желтых.

В каждом столбце таблицы желтых клеток не меньше, чем красных, следовательно, и во всей таблице желтых клеток не меньше, чем красных.

Таким образом, в таблице одинаковое количество красных и желтых клеток.

2) Предположим, что в каком-нибудь столбце желтых клеток больше, чем красных. Так как в каждом из остальных столбцов желтых клеток не меньше, чем красных, то тогда во всей таблице желтых клеток будет больше, чем красных, но это не так (см. 1). Значит, в каждом из восьми столбцов красных и желтых клеток поровну.

3) Так как в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем зеленых, то исключаются случаи, когда в каждом столбце: а) 1 желтая, 1 красная, 5 зеленых клеток и б) 2 желтые, 2 красные, 3 зеленых клетки.

Остается только случай, когда в каждом столбце 3 красных, 3 желтых и 1 зеленая клетка. Тогда всего в таблице — 8 зеленых клеток.

Этот случай возможен. Например, см. таблицу.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$\mp$ *доказано, что зеленых клеток может быть только* 8, *но пример не приведен*

$\mp$ *приведены только верный ответ и пример*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*