9 класс

9.1. Известно, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Какие значения может принимать выражение

$$a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)?$$

Ответ: 0.

Решение. Из условия следует, что $a^2-b^2=c-b$, $b^2-c^2=a-c$ и $c^2-a^2=b-a$. Следовательно, $a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)=a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)=0$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *верный ответ получен путем рассмотрения частных примеров*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.2. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?

Ответ: да.

Решение. Таким свойством обладают, например, числа 299 и 300. Действительно, $2\cdot 9\cdot 9:3=54$.

Эти два числа — наименьшие из возможных. Другие примеры получатся, если выбрать любые два последовательных числа, оканчивающиеся на 299 *и* 300.

Критерии проверки:

$+$ *приведен верный пример*

$-$ *приведен только ответ «да» или «нет»*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.3. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. На стороне AB выбрана точка P, а на продолжении стороны AC за точку C — точка Q так, что отрезок PQ касается окружности. Докажите, что $\angle BOP=\angle COQ$.

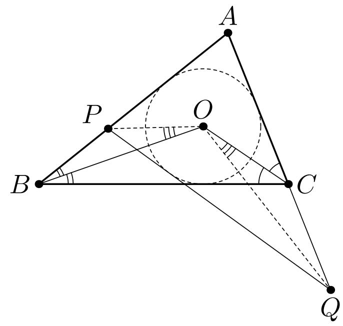


Рис. 9.3

Решение. *Первый способ.* Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе. Применяя для треугольника BOP теорему о внешнем угле (см. рис. 9.3), получим: $\angle BOP=\angle APO-\angle ABO=\frac{1}{2}\angle APQ-\frac{1}{2}\angle ABC$. Аналогично, для треугольника COQ : $\angle COQ=\angle ACO-\angle AQO=\frac{1}{2}\angle ACB-\frac{1}{2}\angle AQP$. Осталось убедиться, что $\angle APQ-\angle ABC=$ $=\angle ACB-\angle AQP$. Это равенство равносильно тому, что $\angle APQ+\angle AQP=\angle ABC+\angle ACB$, которое, очевидно, выполняется, так как каждая его часть равна $180^\circ-\angle BAC$.

Второй способ. Заметим, что для треугольника PAQ данная окружность также является вписанной (см. рис. 9.3). Значит, O — точка пересечения биссектрис как в треугольнике BAC, так и в треугольнике PAQ. Следовательно, $\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC=\angle POQ$. Тогда $\angle BOP=\angle POQ-\angle BOQ=$ $=\angle BOC-\angle BOQ=\angle COQ$, что и требовалось.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Доказательство формулы для вычисления тупого угла между двумя биссектрисами треугольника (см. второй способ) от учащихся не требуется.

9.4. Из Златоуста в Миасс выехали одновременно «ГАЗ», «МАЗ» и «КамАЗ». «КамАЗ», доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил «МАЗ» в 18 км, а «ГАЗ» — в 25 км от Миасса. «МАЗ», доехав до Миасса, также сразу повернул назад и встретил «ГАЗ» в 8 км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?

Ответ: 60 км.

Решение. Пусть расстояние между городами равно x км, а скорости грузовиков: «ГАЗа» — g км/ч, «МАЗа» — m км/ч, «КамАЗа» — k км/ч. Для каждой пары машин приравняем их время движения до встречи. Получим $\frac{x+18}{k}=\frac{x-18}{m}$, $\frac{x+25}{k}=\frac{x-25}{g}$ и $\frac{x+8}{m}=\frac{x-8}{g}$. Запишем эти уравнения иначе: $\frac{x+18}{x-18}=\frac{k}{m}$, $\frac{x-25}{x+25}=\frac{g}{k}$ и $\frac{x+8}{x-8}=\frac{m}{g}$. Перемножив их почленно, получим: $\frac{x+18}{x-18}\cdot\frac{x-25}{x+25}\cdot\frac{x+8}{x-8}=1$.

Преобразуем полученное уравнение, учитывая, что знаменатель каждой дроби отличен от нуля: $x^3+x^2+(18\cdot8-18\cdot25-8\cdot25)x-18\cdot8\cdot25=x^3-x^2+(18\cdot8-18\cdot25-8\cdot25)x+18\cdot8\cdot25 \Leftrightarrow 2x^2=2\cdot18\cdot8\cdot25$. Так как $x>0$, то $x=60$.

Критерии проверки:

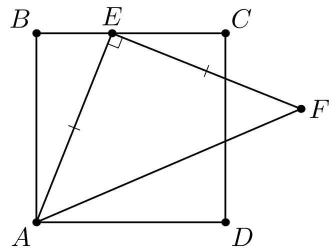
$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *верно получено уравнение с одной переменной (искомой), но при его решении допущена ошибка*

$\mp$ *верно записаны три пропорции, но дальнейших продвижений нет*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*



9.5. Квадрат $ABCD$ и равнобедренный прямоугольный треугольник AEF ($\angle AEF=90^\circ$) расположены так, что точка E лежит на отрезке BC (см. рисунок). Найдите угол DCF.

Ответ: 45°.

Решение. *Первый способ.* Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую BC (см. рис. 9.5а). Так как $\angle FEP=90^\circ-\angle BEA=\angle EAB$, то прямоугольные треугольники FEP и EAB равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $PF=BE$. Кроме того, $BE=BC-CE=$ $=AB-CE=EP-CE=PC$. Таким образом, $PF=PC$, то есть треугольник CPF прямоугольный и равнобедренный. Значит, $\angle FCP=45^\circ$, тогда и $\angle DCF=45^\circ$.

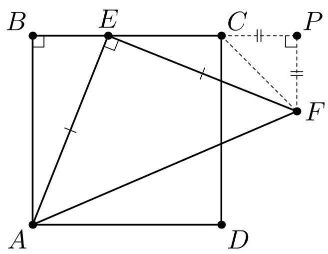


Рис. 9.5а

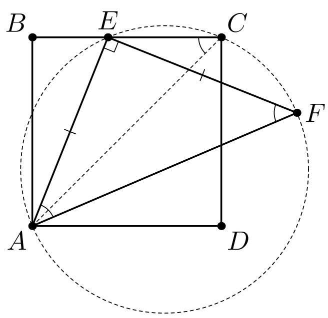


Рис. 9.5б

Второй способ. Проведем диагональ AC. Так как $\angle ECA=\angle EFA=45^\circ$, то четырёхугольник $EFCA$ — вписанный (см. рис. 9.5б). Тогда $\angle ACF=\angle AEF=90^\circ$. Следовательно, $\angle DCF=\angle ACF-$ $-\angle ACD=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные неточности или пробелы*

$-$ *приведен только ответ или ответ, полученный на частном примере*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

9.6. В ожидании покупателей продавец арбузов поочерёдно взвесил 20 арбузов (массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 20 кг), уравновешивая арбуз на одной чашке весов одной или двумя гирями на другой чашке (возможно, одинаковыми). При этом продавец записывал на бумажке, гири какой массы он использовал. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться в его записях, если масса каждой гири — целое число килограммов?

Ответ: 6 чисел.

Решение. Проверим, что одной или двумя гирями массы 1 кг, 3 кг, 5 кг, 7 кг, 9 кг и 10 кг можно взвесить любой из данных арбузов. Действительно, $2=1+1$; $4=3+1$; $6=5+1$; $8=7+1$; $11=10+1$; $12=9+3$; $13=10+3$; $14=9+5$; $15=10+5$; $16=9+7$; $17=10+7$; $18=9+9$; $19=10+9$; $20=10+10$. Таким образом, 6 различных чисел могло быть записано.

Покажем, что пяти типов гирь недостаточно для требуемых взвешиваний. Если гирь пять, то какие-то двадцать арбузов, вообще говоря, взвесить можно. А именно: пять арбузов уравновесить одиночными гирями, пять — двойными и остальные $\frac{5\cdot4}{2}=10$ арбузов — парами различных гирь. Но при этом каждая комбинация гирь должна быть использована ровно один раз.

Заметим, что половина арбузов имеет нечетную массу. Пусть из пяти гирь k имеют нечетную массу, а $(5-k)$ — четную. Тогда количество способов взвесить арбуз нечетной массы в точности равно $k+k(5-k)=6k-k^2$. Однако ни при каком $k=0$; 1; 2; 3; 4; 5 это выражение не равно 10 (*это можно проверить либо подстановкой, либо решив квадратное уравнение* $6k-k^2=10$).

Следовательно, продавец не мог записать меньше чем 6 чисел.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

$\pm$ *доказано, что меньше шести чисел не могло быть записано, верно указан набор из шести гирь, но не показано, как именно взвешивать арбузы*

$\mp$ *доказано только, что пяти гирь не хватит*

$\mp$ *не доказано, что пяти гирь не хватит, но приведен верный набор из шести гирь (независимо от того, показано ли, как именно взвешивать арбузы)*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*