Решения и критерии оценивания

Задача 1

Камень бросили с горизонтальной площадки под углом к горизонту в направлении вертикальной стены. Камень упруго ударился о стену и упал на площадку. Известно, что время полёта от момента бросания до удара составило t_1, а время полёта от удара до падения – t_2. Определите, на какой высоте камень ударился о стену. Стена перпендикулярна плоскости, в которой движется камень. Влиянием воздуха можно пренебречь.

Решение

Пусть h – высота, на которой произошел удар. Тогда для движения камня до удара вдоль вертикальной оси Oy можно записать: $h = v_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$,

где v_{0y}– проекция начальной скорости камня на ось Oy.

В момент упругого удара меняется только горизонтальная составляющая скорости, движение по вертикали можно рассматривать так, как будто удара не было. За время $t_1 + t_2$камень опять упал на землю, что соответствует уравнению: $0 = v_{0y}(t_1 + t_2) - \frac{g(t_1+t_2)^2}{2}$.

Отсюда находим, что начальная вертикальная скорость камня равна

$$v_{0y} = \frac{g(t_1 + t_2)}{2}.$$

Подставим эту скорость в первое уравнение и найдём высоту, на которой произошел удар: $h = \frac{gt_1t_2}{2}$.

Критерии оценивания

Указано, что вертикальные составляющие скорости камня до и после удара равны..**1 балл**
Выражена высота через v_{0y} и t (любое)..**3 балла**
Найдена проекция скорости v_{0y}..**3 балла**
Получен ответ..**3 балла**

Максимально за задачу – **10 баллов**.

Задача 2

По наклонной плоскости, которая затем плавно переходит в горизонтальную, соскальзывает маленькая шайба, которая останавливается в точке B (рис. 1). Найдите скорость шайбы в точке A. Коэффициент трения между обеими плоскостями и шайбой равен μ, наклонная плоскость образует угол α с горизонтом, $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. Расстояния l_1и l_2известны, $\mu l_2 > l_1 \sin\alpha$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

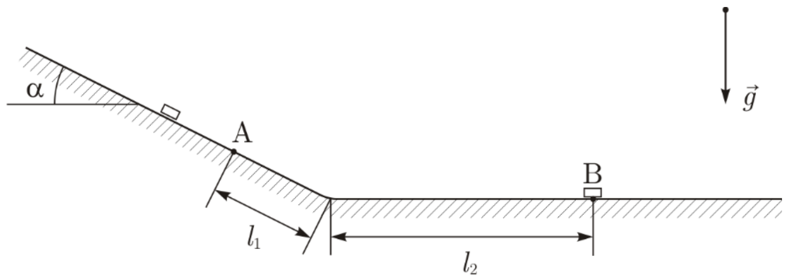

Рис. 1

Решение

Первый способ (энергетический)

Обозначим искомую скорость шайбы в точке A через v, а массу шайбы через m. Пока шайба скользит по наклонной плоскости, на неё действуют сила тяжести, сила реакции опоры $N_1 = mg\cos\alpha$ и сила трения $F_{\text{тр1}} = \mu N_1 = \mu mg\cos\alpha$. Модуль работы силы трения на участке от точки A до конца наклонной плоскости

$$A_1 = \mu mg\cos\alpha\, l_1.$$

При движении по горизонтальной плоскости на шайбу действуют сила тяжести, сила реакции опоры $N_2 = mg$ и сила трения $F_{\text{тр2}} = \mu N_2 = \mu mg$. Модуль работы силы трения на этом участке $A_2 = \mu mgl_2$.

По закону изменения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mgl_1\sin\alpha = A_1 + A_2 = \mu mg(l_1\cos\alpha + l_2),$$

откуда

$$v = \sqrt{2g\big(\mu l_2 - l_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\big)}.$$

Второй способ (динамический)

При движении по наклонной плоскости проекция ускорения шайбы на направление движения $a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Пусть v — искомая скорость шайбы в точке A, v_1 — скорость шайбы в точке, где наклонная плоскость переходит в горизонтальную. Поскольку шайба движется равноускоренно:

$$l_1 = \frac{v_1^2 - v^2}{2a_1} \Rightarrow v = \sqrt{v_1^2 - 2a_1 l_1} = \sqrt{v_1^2 - 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)l_1}.$$

При движении по горизонтальной плоскости проекция ускорения шайбы на направление движения: $a_2 = -\mu g$,

значит, $l_2 = -\frac{v_1^2}{2a_2} \Rightarrow v_1^2 = -2a_2 l_2 = 2\mu g l_2$.

Подставив это равенство в полученное ранее выражение для v, найдём:

$$v = \sqrt{2g(\mu l_2 - l_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha))}.$$

Критерии оценивания

Указаны силы, действующие на шайбу при движении по наклонной плоскости .... **1 балл**

Указаны силы, действующие на шайбу при движении по горизонтальной плоскости .... **1 балл**

Для решений энергетическим методом

Найден модуль работы A_1 .... **2 балла**

Найден модуль работы A_2 .... **2 балла**

Записан закон изменения механической энергии .... **2 балла**

Для решений динамическим методом

Найдена проекция ускорения a_1 .... **1 балл**

Записано уравнение $l_1 = \frac{v_1^2 - v^2}{2a_1}$ .... **2 балла**

Найдена проекция ускорения a_2 .... **1 балл**

Записано уравнение $l_2 = -\frac{v_1^2}{2a_2}$ .... **2 балла**

Получен ответ .... **2 балла**

Максимально за задачу – **10 баллов**.

Задача 3

Теплоизолированный сосуд до краёв наполнен водой при температуре $t_0 = 20$ °C. В воду аккуратно опустили алюминиевую деталь, охлаждённую до температуры $t = -100$ °C. После установления теплового равновесия температура в сосуде оказалась равной $t_1 = 1$ °C. Определите конечную температуру и содержимое сосуда для случая, когда в этот же сосуд с водой погружают две такие алюминиевые детали. Объём детали равен $V = 100\ \text{см}^3$.

Табличные данные: плотность воды $\rho_\text{в} = 1000\ \text{кг/м}^3$, плотность алюминия $\rho = 2700\ \text{кг/м}^3$, плотность льда $\rho_\text{л} = 900\ \text{кг/м}^3$, удельная теплоёмкость воды $C_\text{в} = 4200\ \text{Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)}$, удельная теплоёмкость алюминия $C = 880\ \text{Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)}$, удельная теплоёмкость льда $C_\text{л} = 2100\ \text{Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335\ \text{кДж/кг}$.

Решение

Запишем уравнение теплового баланса для первого случая

$$C_\text{в}\rho_\text{в}(V_0 - V)(t_1 - t_0) + C\rho V(t_1 - t) = 0,$$

где V_0 – начальный объём воды. Здесь учтено, что при погружении алюминиевой детали часть воды выльется, а теплота перейдёт к детали только от оставшейся воды.

Найдём отсюда начальный объём воды:

$$V_0 = V\left(1 + \frac{C}{C_\text{в}} \cdot \frac{\rho}{\rho_\text{в}} \cdot \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}\right) \approx 400{,}7\ \text{см}^3.$$

Предположим, что при погружении двух деталей вода охладилась до температуры $t_2 = 0$°C, и только часть воды превратилась в лёд. Запишем уравнение теплового баланса для этого случая:

$$C_\text{в}\rho_\text{в}(V_0 - 2V)(t_2 - t_0) + 2C\rho V(t_2 - t) - \lambda\rho_\text{л}V_\text{л} = 0.$$

Найдём отсюда получившийся объём льда:

$$V_\text{л} = \frac{C_\text{в}\rho_\text{в}(V_0 - 2V)(t_2 - t_0) + 2C\rho V(t_2 - t)}{\lambda\rho_\text{л}} \approx 101{,}7\ \text{см}^3.$$

Этот объём меньше, чем объём воды $V_0 - 2V \approx 200{,}7\ \text{см}^3$, который был в сосуде сразу после погружения двух деталей. То, что получившийся объём льда меньше, чем доступный для замерзания объём воды, показывает, что наше предположение верное.

Таким образом, в сосуде должна установиться температура 0 °C и в сосуде будут находиться две алюминиевые детали, лёд объёмом ≈ 102 см^3 и вода объёмом $\approx (200{,}7 - 101{,}7)$см$^3 = 99$ см^3.

Критерии оценивания

Используется, что после погружения детали не весь объём (или масса) воды участвует в обмене теплотой, а только её часть объёмом $V_0 - V$ ....**1 балл**
Записано уравнение теплового баланса для первого случая ....**2 балла**
Записано уравнение теплового баланса для второго случая или процесс теплообмена рассматривается по частям ....**3 балла**
Доказано, что конечная температура в сосуде 0 °C....................................**2 балла**
Найден конечный объём (масса) льда в сосуде..**1 балл**
Найден конечный объём (масса) воды в сосуде..**1 балл**

Максимально за задачу – **10 баллов**.

Задача 4

На рис. 2 изображена схема электрической цепи, состоящей из источника постоянного напряжения U_0, резисторов с одинаковым сопротивлением R, идеального вольтметра и идеального амперметра. Показания вольтметра $U_\text{V} = 3$ В, амперметра – $I_\text{A} = 24$ мА. Определите напряжение источника U_0 и сопротивление R резисторов. Сопротивление источника считать равным нулю.

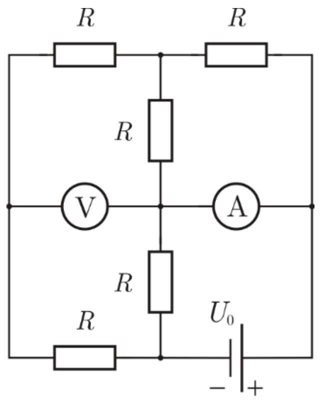

Рис. 2

Решение

Перерисуем схему (рис. 2). Поскольку вольтметр идеальный, ток через него не течёт, и он не влияет на распределение токов в цепи. Амперметр идеальный, поэтому напряжение на нём не падает.

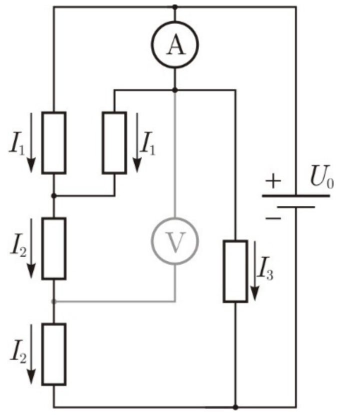

Рис. 2

Для токов верны равенства:

$$I_2 = 2I_1,$$

$$I_A = I_1 + I_3.$$

Падение напряжения на одном резисторе справа равно падению напряжения на резисторах слева:

$$2RI_2 + RI_1 = RI_3,$$

откуда

$$5I_1 = I_3.$$

Отсюда можно выразить все токи в цепи через известный ток I_A:

$$I_1 = \frac{I_A}{6}, \quad I_2 = \frac{2I_A}{6}, \quad I_3 = \frac{5I_A}{6}.$$

Выразим напряжение на вольтметре через эти токи и сопротивление R:

$$U_V = RI_3 - RI_2 = \frac{RI_A}{2},$$

откуда получаем сопротивление резистора

$$R = \frac{2U_V}{I_A} = 250 \text{ Ом}.$$

Напряжение на источнике

$$U_0 = RI_3 = \frac{5U_V}{3} = 5 \text{ В}.$$

Критерии оценивания

Используется, что напряжение на амперметре не падает............................**1 балл**
Используется, что через вольтметр ток не течёт..**1 балл**
Удалось нарисовать правильную эквивалентную схему (не обязательно, как у автора, но упрощающую понимание задачи)……………...……….. ....**1 балл**
Указано, что $I_2 = 2I_1$ ....**1 балл**
Указано, что $I_\text{А} = I_1 + I_3$...**1 балл**
Показано, что $I_3 = 5I_1$ ....**1 балл**
Найдено сопротивление R ....**2 балла**
Найдено U_0 ....**2 балла**

Максимально за задачу – **10 баллов**.

Задача 5

Бессмертный Шерлок Холмс идёт вдоль многоэтажного дома по дороге, параллельной одной из его стен. Шерлок не видит солнце, но зато видит его отражение в панельных окнах 15-го этажа, причём пока Холмс сделал 370 шагов, солнце прошло слева направо через 40 окон. Посмотрев на землю, Холмс заметил, что длина его тени равна 2,5 м, причём тень перпендикулярна дороге. Сделав все эти измерения, Холмс повернулся на 90 градусов и по прямой дорожке подошёл к дому – теперь он насчитал 120 шагов. Внутри дома Шерлок измерил высоту от пола до потолка – 3 м и ширину комнаты, единственное окно которой выходит на сторону дороги, где он прогуливался – 5 м. Сделав все необходимые вычисления, Холмс определил толщины стен и межэтажных перекрытий в здании. Вычислите их вслед за сыщиком.

Указание. Разумеется, Холмс знал длину своего шага и рост: 60 см и 190 см соответственно. Погрешности великого сыщика не интересуют. Панельными называются окна, которые занимают в комнате всю стену целиком.

Решение

1. Во-первых, расстояние, пройденное сыщиком вдоль дома вследствие прямолинейного распространения света, равно расстоянию между крайними окнами, в которых он видит отражение. Отсюда расстояние между соседними окнами равно:

$$S = \frac{370\ \text{шагов} \cdot 0{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{шаг}}}{40} = 5{,}55\ \text{м}.$$

S равно сумме ширины комнаты и ширины стены. Выходит, толщина стен составляет

$$d_1 = 5{,}55 \text{ м} - 5 \text{ м} = 55 \text{ см}.$$

2. Высота 15-го этажа определяется из рассмотрения подобных треугольников, образуемых: один – телом сыщика, наблюдаемым им отражённым лучом света и проекцией этого луча на горизонтальную плоскость, а другой – лучом, его проекцией и стеной дома.

Из подобия

$$H = 1{,}90 \text{ м} \cdot \frac{120 \text{ шагов} \cdot 0{,}6 \frac{\text{м}}{\text{шаг}} + 2{,}5 \text{ м}}{2{,}5 \text{ м}} = 56{,}62 \text{ м}.$$

Высота одного этажа с перекрытием составит:

$$h = \frac{H}{15} \approx 3{,}77 \text{ м}.$$

Вычитая высоту комнаты, получим толщину межэтажных перекрытий:

$$d_2 = 3{,}77 \text{ м} - 3 \text{ м} = 77 \text{ см}.$$

Критерии оценивания

Указано, что перемещение сыщика вдоль дома равно перемещению отражения солнца .... **1 балл**
Найдено расстояние между соседними окнами .... **2 балла**
Найдена толщина стен .... **1 балл**
Для нахождения высоты 15 этажа используется подобие соответствующих треугольников (в работе имеется рисунок либо словесное описание)............ **2 балла**
Найдена высота одного этажа .... **2 балла**
Найдена толщина межэтажных перекрытий .... **2 балла**

Максимально за задачу – **10 баллов**.

Максимальный балл за всю работу – 50.