ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2015–2016 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
11 класс

Решения и критерии оценивания

1. За лето однокомнатная квартира подорожала на 21 %, двухкомнатная — на 11 %, а суммарная стоимость квартир — на 15 %. Во сколько раз однокомнатная квартира дешевле двухкомнатной?

Ответ. В полтора раза.

Решение. Пусть однокомнатная квартира стоила a рублей, двухкомнатная — b рублей. Тогда из условия задачи следует, что $1{,}21a + 1{,}11b = 1{,}15(a + b)$, откуда $1{,}5a = b$.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- Получено нужное уравнение с двумя переменными, а далее из уравнения сделаны неверные выводы или не сделано никаких выводов, — 3 балла.
- Решение, в котором рассмотрены конкретные цены квартир, — 2 балла.
- Только верный ответ — 0 баллов.

2. Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел a и b, бóльших 1, удовлетворяющих уравнению $a^{13} \cdot b^{31} = 6^{2015}$.

Решение. Достаточно привести один пример. Так как $2015 = 13 \cdot 155 = 31 \cdot 65$, подходят $a = 2^{155}$, $b = 3^{65}$. Действительно,

$$(2^{155})^{13} \cdot (3^{65})^{31} = 2^{2015} \cdot 3^{2015} = 6^{2015}.$$

Комментарий. Кроме ещё одного очевидного варианта $a = 3^{155}$, $b = 2^{65}$, могут быть и другие. Например, можно действовать так:

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2 \cdot 13 \cdot 31 + 3 \cdot 13 \cdot 31 = 62 \cdot 13 + 39 \cdot 31,$$
$$(6^{62})^{13} \cdot (6^{39})^{31} = 6^{2015}, \quad a = 6^{62},\ b = 6^{39}.$$

Аналогично можно получить числа $a = 18^{62} = 2^{62} \cdot 3^{124}$, $b = 24^{13} = 2^{39} \cdot 3^{13}$.

Критерии проверки.

- Приведена хотя бы одна пара значений a, b и показано, что она удовлетворяет данному условию — 7 баллов.
- Приведена пара чисел, более ничего не обосновано (а жюри умеет показывать, что пара подходит) — 5 баллов.
- Основная идея решения верна, но допущена арифметическая ошибка (например, написано, что $2015 = 13 \cdot 165$) — 2 балла.

3. Может ли сумма 2015 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 2019 чисел?

Ответ. Не может.

Способ 1 (поиск чисел). Пусть сумма чисел от a до a + 2014 оканчивается той же цифрой, что и сумма чисел от a + 2015 до a + 4033. Тогда кратна 10 разность между этими суммами, равная

$$\frac{2015\cdot(a+a+2014)}{2}-\frac{2019\cdot(a+2015+a+4033)}{2}=$$

$$=2015\cdot(a+1007)-2019\cdot(a+3024)=-4a+2015\cdot1007-2019\cdot3024.$$

При любом значении a разность нечётна, т. е. не может делиться на 10. Противоречие.

Способ 2 (сразу чётность). Среди 2015 + 2019 = 4034 подряд идущих натуральных чисел 2017 нечётных чисел, то есть их количество нечётно. В одну сумму попадает чётное число нечётных чисел, а в другую — нечётное. Значит, указанные суммы будут разной чётности, т. е. не могут оканчиваться на одну цифру.

Комментарий. Обратите внимание: может оказаться, что первая сумма чётная, а вторая — нечётная, а может быть и наоборот.

Критерии проверки.

- Любое верное решение — 7 баллов.
- Высказаны верные мысли о разной чётности сумм, но они недостаточно обоснованы или выводы не сделаны — до 3 баллов.
- Только ответ — 0 баллов.

4. Учительница Мария Ивановна готовит задания для урока математики. Она хочет в уравнении $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{c}$ вместо a, b и c поставить три различных натуральных числа, чтобы корни уравнения были целыми числами. Помогите ей: подберите такие числа и решите уравнение.

Решение. Таких уравнений много, достаточно привести одно из них. Например, корнями уравнения

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}$$

являются числа 0 и –5.

Комментарий. Уравнение, приведённое в решении, можно подобрать. Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Можно сразу взять $c = 2$ и сделать так, чтобы один из корней был равен 0. Получаем данное выше уравнение. Остаётся проверить, что у него второй корень также является целым числом.

Из рассуждений, приведённых ниже, следует, что второй корень обязательно будет целым. Действительно, решение данного уравнения сводится к решению приведённого квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Из теоремы Виета следует, что если один его корень целый, то и другой тоже целый.

Как провести целенаправленный поиск таких чисел a, b и c? Данное уравнение приводится к квадратному уравнению

$$x^2 + (a + b - 2c) \cdot x + (ab - ac - bc) = 0.$$

Его дискриминант равен $(a - b)^2 + 4c^2$. Нужно подобрать такие числа, чтобы дискриминант был равен квадрату целого числа. Это можно сделать, вспомнив «пифагоровы» тройки, например $3^2 + 4^2 = 5^2$ или $5^2 + 12^2 = 13^2$.

В первом случае можно взять $c = 2$, $a – b = 3$. Тогда

$$x_{1,2} = \frac{2c - a - b \pm 5}{2} = \frac{4 - a - b \pm 5}{2}.$$

При $a = 6$, $b = 3$ имеем $x_1 = 0$, $x_2 = –5$. Так получаем уравнение, приведённое выше:

$$\frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}.$$

Во втором случае аналогично возьмём $c = 6$, $a = 7$, $b = 2$. Получаем уравнение

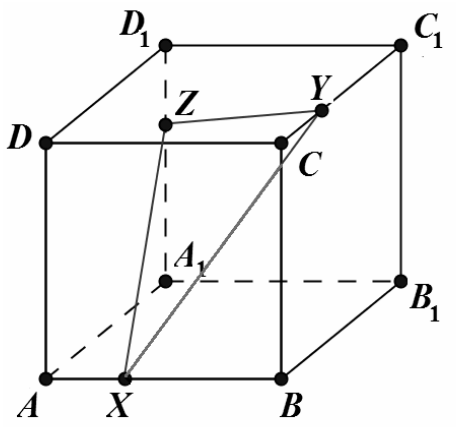
$$\frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{6},$$

корни которого — числа –5 и 8.

Критерии проверки.

- Полное решение — уравнение с конкретными значениями a, b и c, которое решено и найдены его корни, — 7 баллов.
- В решении приведено подходящее уравнение без решения (или решённое неверно), жюри проверило, что оно подходит, — 3 балла.

5. Петя на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметил точку X, делящую ребро AB в отношении 1 : 2, считая от вершины A. Приведите пример, как Петя может отметить на рёбрах CC_1 и A_1D_1 соответственно точки Y и Z, чтобы треугольник XYZ был равносторонним. Пример обоснуйте.



Решение. Отметим точки Y и Z так, что $A_1Z : ZD_1 = 2 : 1$, $C_1Y : YC = 2 : 1$. Равенство сторон треугольника XYZ следует, например, из равенства ломаных XAA_1Z, ZD_1C_1Y и $YCBX$.

Пусть a — длина ребра данного куба. Тогда звенья ломаных равны

$$XA = ZD_1 = YC = \frac{a}{3},$$
$$AA_1 = D_1C_1 = CB = a,$$
$$A_1Z = C_1Y = BX = \frac{2a}{3}.$$

Из равенства треугольников

$$\Delta XBC = \Delta YC_1D_1 = \Delta ZA_1A$$

(прямоугольные треугольники с равными катетами) следует, что $XC = YD_1 = ZA$. Ребро CC_1 перпендикулярно грани $ABCD$, значит, $\Delta XCY = 90^\circ$, т.е., треугольник XCY прямоугольный. Аналогично прямоугольными являются треугольники YD_1Z, ZAX. Из равенства треугольников $\Delta XCY = \Delta YD_1Z = \Delta ZAX$ (прямоугольные треугольники с равными катетами) следует, что $XY = YZ = ZX$, что и требовалось доказать.

Замечание. 1. Стороны треугольника XYZ — диагонали равных прямоугольных параллелепипедов с ребрами a, $\frac{a}{3}$ и $\frac{2a}{3}$, где a — длина ребра данного куба. Их длины можно вычислить, используя пространственную теорему Пифагора.

2. Нетрудно доказать, что точки X, Y и Z переходят друг в друга при повороте куба на 120° вокруг диагонали B_1D.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение (приведён верный пример расположения точек, и доказано, что условие задачи выполнено) — 7 баллов.
- В целом верное решение, содержащее пробелы в обосновании, — 5−6 баллов. В частности, если не доказано, как из равенства ломаных следует равенство сторон треугольника, то ставится 5 баллов.
- Верно указаны точки, но не доказано, что полученный треугольник равносторонний, — 3 баллами.
- Некоторые разумные идеи, не приведшие к верному решению, — 1−2 балла.
- Только верный ответ — 0 баллов.

6. В турнире по шашкам участвовали ученики 10 и 11 классов. Каждый сыграл с каждым один раз. За победу участник получал 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Одиннадцатиклассников было в 10 раз больше, чем десятиклассников, и они вместе набрали в 4,5 раза больше очков, нежели все десятиклассники. Сколько очков набрал самый успешный десятиклассник?

Ответ. 20.

Решение. 1. Пусть в турнире приняло участие a десятиклассников, которые заработали b очков. Тогда играли $10a$ одиннадцатиклассников, которые заработали $4{,}5b$ очков. В каждой партии разыгрывают 2 очка, всего $11a$ игроков играют $\frac{11a(11a-1)}{2}$ партий. Значит, из условия задачи следует соотношение $11a(11a-1) = 5{,}5b$, откуда $b = 2a(11a-1)$.

2. Заметим, что каждый участник играет $11a-1$ партий. Значит, каждый десятиклассник может набрать максимум $2(11a-1)$ очков, если выиграет все игры. Так как a десятиклассников набрали $2a(11a-1)$, они выиграли все свои игры.

3. Если в турнире участвовало хотя бы два десятиклассника, то в игре между собой один из них не выиграл. Это невозможно. Значит, был только один десятиклассник, т. е. $a = 1$. Он набрал $2(11a-1) = 20$ очков.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение — 7 баллов.
- В целом верное решение, содержащее пробелы в обосновании, — 5−6 баллов.
- Решение, в котором получили соотношение между количеством команд и набранными очками (в решении — $b = 2a(11a-1)$), но не было дальнейших продвижений далее, — 2 балла.
- Только верный ответ — 0 баллов.