ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2015–2016 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП
9 класс

**Решения и критерии оценивания**

**1.** Натуральное число называется палиндромом, если оно не изменяется при записывании его цифр в обратном порядке (например, 626 — палиндром, а 2015 — нет). Представьте число 2015 в виде суммы двух палиндромов.

**Ответ.** 2015 = 1551 + 464

*Комментарий.* Чтобы найти решение, можно было рассуждать так:

Так как 2002 не подходит, значит, большее слагаемое имеет вид $\overline{1AA1}$. Тогда второе слагаемое должно заканчиваться на 4, так как оно равно $2015 - \overline{1AA1}$, т. е. имеет вид $\overline{4B4}$. Итак, $2015 - \overline{1AA1} = \overline{4B4}$. Получаем

$$2015 - 1001 - 404 = \overline{AA0} + \overline{B0},$$

т. е. $61 = \overline{AA} + B$, откуда $\overline{AA} = 55$, $B = 6$.

**Критерии проверки.**

- Верный пример — 7 баллов.

Приводить доказательство, что другие не подходят, или рассуждение, как пример был найден, не требуется.

- Неверный пример — 0 баллов.

**2.** На доске была написана несократимая дробь. Петя уменьшил её числитель на 1, а знаменатель на 2. А Вася прибавил к числителю 1, а знаменатель оставил без изменений. Оказалось, что в результате мальчики получили одинаковые значения. Какой именно результат у них мог получиться?

**Ответ.** 1.

**Решение.** Пусть была написана дробь $\frac{a}{b}$. Тогда Петя получил $\frac{a-1}{b-2}$, а Вася $\frac{a+1}{b}$. Так как они получили одинаковый результат, $\frac{a-1}{b-2}=\frac{a+1}{b}$, откуда $b-a=1$. Значит, исходная дробь имела вид $\frac{a}{a+1}$. И Петя получил из неё дробь $\frac{a-1}{a-1}$, а Вася $\frac{a+1}{a+1}$, т. е. результат и Пети, и Васи равен 1.

*Комментарий.*

Т.к. в условии говорится, что у Пети и у Васи полученная дробь имела некоторое значение, проверять, что знаменатель не равен нулю, не требуется.

**Критерии проверки.**

- Верное решение — 7 баллов.
- Получено, что исходная дробь имела вид $\dfrac{a}{a+1}$ (или эквивалентный ему), но далее выводов про итоговое значение не сделано — 3 балла.
- Решение приведено на конкретном примере (например, показано, что для дроби $\dfrac{2}{3}$ условие задачи выполнено) — 2 балла.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

**3.** Дима должен был попасть на станцию в 18:00. К этому времени за ним должен был приехать отец на автомобиле. Однако Дима успел на более раннюю электричку и оказался на станции в 17:05. Он не стал дожидаться отца и пошёл ему навстречу. По дороге они встретились, Дима сел в автомобиль, и они приехали домой на 10 минут раньше рассчитанного времени. С какой скоростью шёл Дима до встречи с отцом, если скорость автомобиля была 60 км/ч?

**Ответ.** 6 км/ч.

**Решение.** Дима приехал домой на 10 минут раньше, за это время автомобиль дважды проехал бы путь, который Дима прошёл. Следовательно, на пути к вокзалу отец на автомобиле сэкономил 5 минут и встретил Диму в 17:55. Значит, Дима прошёл расстояние от вокзала до встречи с отцом за 50 минут, то есть он шёл в 10 раз медленнее автомобиля, и его скорость была 6 км/ч.

**Критерии проверки.**

- Полное верное решение — 7 баллов.
- В целом верное решение с недостаточными обоснованиями (в частности, нарисована схема движения с неполными обоснованиями) — 5 баллов.
- Верный ход решения, но неверный ответ из-за арифметической ошибки — 4 балла.
- Найдено, что время встречи 17:55, а дальше продвижений нет — 2 балла.
- Найдено, что отец по дороге к вокзалу сэкономил 5 минут, но ошибочно принято, что до встречи Дима шёл 55 минут, — 2 балла.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

**4.** В подземном царстве живут гномы, предпочитающие носить либо зелёные, либо синие, либо красные кафтаны. Некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Однажды каждому из них задали четыре вопроса.
1. «Ты предпочитаешь носить зелёный кафтан?»
2. «Ты предпочитаешь носить синий кафтан?»
3. «Ты предпочитаешь носить красный кафтан?»
4. «На предыдущие вопросы ты отвечал честно?»
На первый вопрос «да» ответили 40 гномов, на второй — 50, на третий — 70, а на четвёртый — 100. Сколько честных гномов в подземном царстве?

**Ответ:** 40 честных гномов.

**Решение.**
На 4-й вопрос и честный, и лгун ответят «да», поэтому в подземном царстве всего 100 гномов.
Честный гном на один из трёх первых вопросов ответит «да», а на два — «нет». А лгун, наоборот, на два из первых трёх вопросов ответит «да», а на один — «нет».
Далее ответ можно получить или уравнением, или рассуждением.

**Способ 1.** Пусть всего $x$ честных гномов. Тогда всего на первые три вопроса будет $x + 2 \cdot (100 - x) = 200 - x$ ответов «да», т. е. $200 - x = 40 + 50 + 70 = 160$, откуда $x = 40$.

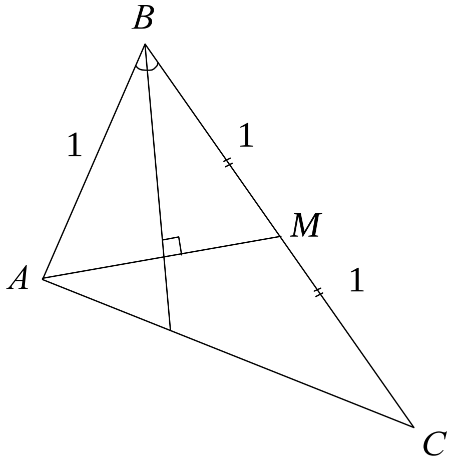
**Способ 2.** В сумме на первые три вопроса было дано $40 + 50 + 70 = 160$ ответов «да». Если бы все гномы говорили правду, то на первые три вопроса было бы 100 ответов «да». Так как каждый лжец даёт на один ответ «да» больше, всего отвечали $160 - 100 = 60$ лжецов. Значит, честных гномов 40.

**Критерии проверки.**
- Верное решение — 7 баллов.
- Рассуждением найдено, сколько лжецов, а сколько честных гномов, не найдено — 5 баллов.
- Верный ответ без обоснования — 2 балла.

**5.** В треугольнике $ABC$ медиана, выходящая из вершины $A$, перпендикулярна биссектрисе угла $B$, а медиана, выходящая из вершины $B$, перпендикулярна биссектрисе угла $A$. Известно, что сторона $AB = 1$. Найдите периметр треугольника $ABC$.

**Ответ:** 5.

**Решение.** Пусть $AM$ – медиана, проведённая из вершины $A$. Тогда в треугольнике $ABM$ биссектриса угла $B$ перпендикулярна стороне $AM$, т. е. биссектриса является и высотой. Значит, этот треугольник равнобедренный, $AB = BM = 1$. Но тогда $BC = 2BM = 2$. Аналогично из второго условия получаем, что сторона $AC$ в два раза больше $AB$, т. е. периметр треугольника $ABC$ равен $1+ 2 + 2 = 5$.




**Критерии проверки.**

- Верное решение — 7 баллов.
- Получено, что треугольник, отсекаемый одной из медиан, — равнобедренный, но дальнейших продвижений нет — 3 балла.
- Приведён только верный ответ — 1 балл.

**6.** Есть три сосуда объёмом 3 л, 4 л и 5 л без делений, кран с водой, раковина и 3 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде количество воды было равно количеству сиропа?

**Решение.**

Например, так (см. таблицу ниже, с — сироп, в — вода, и — итоговая смесь).

<table>
<tr><th></th><th>3-литровый сосуд</th><th>4-литровый сосуд</th><th>5-литровый сосуд</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Перельём сироп в 5-литровый сосуд, а с помощью 3- и 4-литровых сосудов получим 2 литра воды в 4-литровом сосуде.</td><td>3с</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>3с</td></tr>
<tr><td>3в</td><td>0</td><td>3с</td></tr>
<tr><td>0</td><td>3в</td><td>3с</td></tr>
<tr><td>3в</td><td>3в</td><td>3с</td></tr>
<tr><td>2в</td><td>4в</td><td>3с</td></tr>
<tr><td>2в</td><td>0</td><td>3с</td></tr>
<tr><td>0</td><td>2в</td><td>3с</td></tr>
<tr><td>Долив затем 4-литровый сосуд сиропом, получим 4 л нужной смеси.</td><td>0</td><td>2в + 2с = 4и</td><td>1с</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Отольём 3 литра этой смеси и оставшийся 1 литр смеси дополним 1 л сиропа, а затем 1 литром воды в 3-литровом сосуде.</td><td>3и</td><td>1и</td><td>1с</td></tr>
<tr><td>3и</td><td>1и + 1с</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1и + 1с</td><td>3и</td></tr>
<tr><td>1и + 1с</td><td>0</td><td>3и</td></tr>
<tr><td>1и + 1с + 1в = 3и</td><td>0</td><td>3и</td></tr>
</table>

**Критерии проверки.**

- Верный алгоритм — 7 баллов.
- Получено меньше 6 литров нужной смеси (т. е. в одном сосуде получена нужная смесь, а в другом пропорция не соблюдена) — не более 1 балла.