Возможные решения и критерии оценивания

Возможное решение Т-11-1

По теореме о движении центра масс время падения пружинки - это время падения тела с высоты $H = h + h_c$, где h_c - высота центра масс относительно положения нижнего витка висящей пружины. Найдем эту высоту. Пусть жесткость одного витка пружины k, его масса m, число витков в пружине N. Тогда из условия равновесия для i-ого витка получаем:

$$k\Delta x_i = (i-1)mg \tag{11.1}$$

Координата i-ого витка равна

$$x_i = \sum_1^i \Delta x_i = \frac{mgi(i-1)}{2k} \tag{11.2}$$

Тогда, с учетом того, что число витков $N \gg 1$, получаем:

$$l = x_N = \frac{mgN(N-1)}{2k} \approx \frac{mgN^2}{2k} \tag{11.3}$$

Вычислим координату центра масс:

$$h_c = \frac{1}{mN}\sum_1^N mx_i = \frac{1}{N}\sum_1^N \frac{mgi(i-1)}{2k} = \frac{1}{N}\Big(\frac{mgN^3}{6k} + O(N^2)\Big) \approx \frac{mgN^2}{6k} = \frac{l}{3} \tag{11.4}$$

Время падения пружины

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{l}{3}\right)}{g}} \approx 0.55\,\text{с} \tag{11.5}$$

Если учесть длину пружины в сжатом состоянии, то поправка на положение центра масс не превысит l_0, а поправка на время падения, соответственно, составит

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{l_0}{2\left(h + \frac{l}{3}\right)} \approx 2\% \Rightarrow \Delta\tau = 0.01\,\text{с} \tag{11.6}$$

Критерии оценивания Т-11-1

1. Идея о применении теоремы о движении центра масс .... 2 балла
2. Определено положение центра масс пружины .... 4 балла
   - Расчитано растяжение элемента пружинки .... 1 балл
   - Координата элемента пружинки .... 1 балл
   - Координаты центра масс .... 2 балла
3. Найдено время τ падения пружины без учета l_0 .... 3 балла
4. Сделана оценка влияния l_0 на время падения, или корректно учтено l_0 ... 1 балл

Возможное решение Т-11-2

Рассмотрим перемещение порции одного моля воздуха в атмосфере. В адиабатическом приближении по закону сохранения энергии работа внешнего по отношению к выделенной порции воздуха давления расходуется на изменение внутренней U и потенциальной $\mu g z$. Тогда:

$$P_1V_1 - P_2V_2 = U_2 - U_1 + \mu g(z_2 - z_1) \tag{11.1}$$

Перегруппировав слагаемые, получаем:

$$c_p \Delta T = -\mu g \Delta z \tag{11.2}$$

Отсюда получаем зависимость температуры от высоты

$$T = T_0 - \frac{\mu g}{c_p} z = T_0 - \frac{2\mu g}{7R} z \tag{11.3}$$

Высоту атмосферы можно оценить по высоте, при которой температура воздуха обращается в абсолютный ноль:

$$H \approx \frac{7RT_0}{2\mu g} \approx 30 \text{ км} \tag{11.4}$$

Нижняя кромка облаков образуется в точке росы, то есть на такой высоте h_0, при которой парциальное давление водяного пара сравнивается с давлением насыщенного пара $P(z)$, учитывая, что на поверхности Земли давление пара $P_0 = \varphi P_H(T_0)$.

По законам гидростатики парциальное давление водяного пара с высотой изменяется по закону:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \tag{11.5}$$

Так как $h_0 \ll H$, то можно считать изменения температуры и давления воздуха малыми, поэтому его плотность практически постоянна и равна $\rho \approx P_0 \mu_{H_2O}/RT_0$. Тогда давление изменяется по линейному закону:

$$\frac{P(z)}{P_H(T_0)} \approx \frac{P_0}{P_H(T_0)} - \frac{\rho g z}{P_H(T_0)} = \varphi\Big(1 - \frac{\mu_{H_2O} g z}{RT_0}\Big) \tag{11.6}$$

Используя таблицу зависимости давления насыщенного пара от температуры и зная зависимость температуры от высоты, построим график зависимости давления насыщенного пара от высоты $P_H(z)/P_H(T_0)$. На этой же координатной плоскости построим график зависимости парциального давления водяного пара $P(z)/P_H(T_0)$. Абсцисса точки пересечения этих графиков и будет искомой высотой.

Из графиков получаем, что $h_0 \approx 0.43$ км. Заметим, что на этой высоте парциальное давление паров понизилось примерно на 6% по сравнению с давлением у поверхности Земли, а температура - менее, чем на 2%, что вполне оправдывает наши приближения.

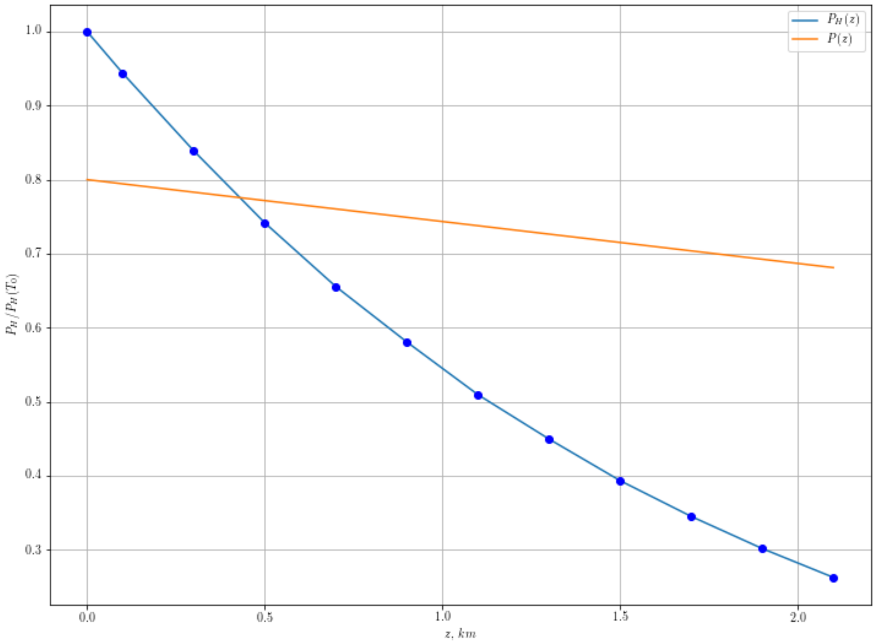

Рис. 11.4
Зависимость давления от высоты

Альтернативное решение Выделим полубесконечный цилиндр воздуха сечением S. Рассмотрим небольшую порцию на высоте от z до $z + dz$. Запишем условие равновесия для этой порции:

$$P(z)S = P(z + dz)S + g\rho S dz \Rightarrow dP = -\rho g dz \tag{11.1}$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона, уравнения Пуассона в форме $\rho^{1-\gamma}T = const$ и с учетом (1) получаем:

$$\frac{7}{2}RdT = -\mu g dz \tag{11.2}$$

Проинтегрировав, получаем зависимость температуры воздуха от высоты:

$$T = T_0 - \frac{2\mu g}{7R}z \tag{11.3}$$

Дальнейшее решение полностью совпадает с основным

Примечание: Можно находить зависимость давления от высоты так же через уравнение Пуассона, а затем делать оценку, приравнивая нулю давление на высоте H. Зависимость $P(z)$ при этом получается следующая:

$$P(z) = P(0)\left(1 - \frac{2\mu g}{7RT_0}z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Критерии оценивания Т-11-2

1. Записан закон сохранения энергии или 2 закон Ньютона .... 1 балл
2. Найдена зависимость температуры или давления от высоты .... 1,5 балла
3. Сделана оценка высоты атмосферы .... 1,5 балла
4. Идея, объясняющая причину происхождения нижней кромки облаков . 1,5 балла
5. Получена зависимость парциального давления водяного пара от высоты 2 балла
6. Получено значение высоты $h_0 = 0{,}4 - 0{,}5$ км (графически или подбором) 2 балла
7. Проверено используемое приближение .... 0,5 балла

Возможное решение Т-11-3

Для определения зависимости $E_r(r)$ вблизи положения равновесия воспользуемся теоремой Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через поверхность соосного с заряженным небольшого цилиндра (радиус основания r, высота $2x$ ($x \ll r \ll R,H$) равен нулю. Для начала найдем $E_x(x)$. Это поле однородно заряженного кольца высотой $2x$, лежащего на дальнем от текущей точки крае цилиндра. Заряд кольца $2xQ/H$. Расстояние до точки наблюдения $L \approx \sqrt{R^2 + H^2/4}$. Тогда поле кольца на оси:

$$E_x(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{H} 2x \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \frac{H}{2L} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x.$$

Вычислим величины потоков: $\Phi_{\text{осн}}$ через основание и $\Phi_{\text{бок}}$ через боковую поверхность гауссова цилиндра:

$$\Phi_{\text{осн}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x \cdot \pi r^2, \qquad \Phi_{\text{бок}} = 2\pi r \cdot 2x \cdot E_r(r).$$

По теореме Гаусса $2\Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}} = 0$, значит

$$2\pi r \cdot 2x \cdot E_r(r) = -2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{L^3} x \cdot \pi r^2.$$

Отсюда получаем, что в плоскости кольца при смещении r из центра величина вектора напряженности пропорциональна смещению

$$E_r(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2L^3} r.$$

Уравнение движения бусинки:

$$m\ddot{r} = qE_r(r) = -q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2L^3} r.$$

Частота гармонических колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{m} \frac{Q}{2L^3}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma Q}{2L}},$$

Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{2}\pi L \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 L}{\gamma Q}}.$$

Критерии оценивания Т-11-3

Метод «Гаусс»

1. Использование закона Гаусса для малого цилиндра вокруг центра .... 3 балла
2. Определение аксиальной напряженности (идея+расчет) .... 1+2 балла
3. Определение радиальной напряженности .... 1 балл
4. Уравнение колебаний (при правильном 3 пункте) .... 1 балл
5. Ответ .... 2 балла

Метод «Интегрировай давай»

1. Определение поля отрезка (при наличии идеи, что с ним делать дальше .. 1 балл
2. Разложение линеаризованного поля (работа с малыми) .... 3 балла
3. Определение радиальной напряженности .... 3 балла
4. Уравнение колебаний (при правильном 3 пункте) .... 1 балл
5. Ответ .... 2 балла

Метод «Подковы»

1. Идея+рисунок рисунок «взаимновычитающихся» частей цилиндра....... 3 балла
2. Идея об интегрировании по полуокружности с перем. плотностью заряда . 1 балл
3. Определение радиальной напряженности .... 3 балла
4. Уравнение колебаний (при правильном 3 пункте) .... 1 балл
5. Ответ... 2 балла

Возможное решение Т-11-4

Возможное решение 1. Энергетический метод. Перейдем в систему отсчета, в которой катер покоится. В этой системе отсчета скорость движения воды, которая находится далеко от катера равна u, а скорость вытекающей из двигателя воды v. Запишем закон сохранения энергии для воды, которая прошла через канал:

$$\frac{\rho_{\text{в}} u^2}{2} + jBl = \frac{\rho_{\text{в}} v^2}{2}, \tag{11.1}$$

где $j = I/(hl)$ - плотность тока, текущего поперек канала.

В канале возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника, поэтому полный поперечный ток равен

$$I = \frac{\mathscr{E} - vBa}{R} = \frac{lh}{\rho a}(\mathscr{E} - vBa) \tag{11.2}$$

Подставляя (2) в (1) получим:

$$u = \sqrt{v^2 - \frac{2Bl}{\rho \rho_{\text{в}} a}(\mathscr{E} - vBa)} = 8 \text{ м/с}.$$

Сила тяги двигателя равна изменению имульса воды, прошедшей через канал:

$$T = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v - u) = \rho_{\text{в}} a h v (v - u) = 2 \text{ кН}.$$

Полезная мощность:

$$P_{\text{пол}} = Tu = 16 \text{ кВт}.$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{\mathscr{E} I} = \frac{\rho T u a}{lh\mathscr{E}(\mathscr{E} - vBa)} \approx 9\%.$$

Возможное решение 2. Динамический метод. В канале возникает ЭДС индукции, направленная против ЭДС источника. Полный поперечный ток равен

$$I = \frac{\mathscr{E} - vBa}{R} = \frac{lh}{\rho a}(\mathscr{E} - vBa)$$

Сила тяги равна действующей на этот ток силе Ампера:

$$T = F_A = IBa = \frac{lhB}{\rho}(\mathscr{E} - vBa) = 1.8 \text{ кН}. \tag{11.3}$$

С другой стороны, сила тяги двигателя равна изменению имульса воды, прошедшей через канал за единицу времени:

$$T = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v-u) = \rho_{\text{в}} ahv(v-u). \tag{11.4}$$

Приравнивая (1) и (2) получим:

$$u = v - \frac{T}{\rho_{\text{в}} ahv} = \frac{lB}{\rho\rho_{\text{в}} av}(\mathscr{E} - vBa) = 8{,}2 \text{ м/с}.$$

Полезная мощность:

$$P_{\text{пол}} = Tu = 14{,}76 \text{ кВт}.$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{\mathscr{E} I} = \frac{\rho Tua}{lh\mathscr{E}(\mathscr{E} - vBa)} \approx 8{,}2\%.$$

Примечание к динамическому методу. Использованное в этом решении положение $T = F_A$ в действительности равносильно не вполне корректному использованию закона сохранения импульса. В самом деле, если поток воды через канал с расходом $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho ahv$ на большом расстоянии от катера (в СО, связанной с катером) имеет эффективную площадь сечения S такую, что $u \cdot S = vah$, т.е. $S = ah\frac{v}{u}$. Тогда импульс, проходящий за время Δt через S $(\rho uS\Delta t) \cdot u$, увеличивается за счет импульса силы Ампера $IBa\Delta t$, и конечный импульс $\rho ahv\Delta tv = (\rho u\frac{v}{u}ah\Delta t)u + IBa\Delta t$, и $v^2 = vu + \frac{IB}{\rho h} \Rightarrow u = v - \frac{IB}{\rho hv}$, – ровно то же значение, что получено при $T = F_A$. Но в таком рассуждении не учитывается изменение импульса тех масс воды, которые не проходят через канал, а в них из-за увеличения площади сечения скорость становится меньше u, т.е. часть импульса «теряется» (ясно, что есть градиент давления в потоке и система, к которой мы в альтернативном решении применяем закон сохранения импульса, незамкнута).

Критерии оценивания Т-11-4

Энергетический метод (10 баллов)

1. Закон сохранения энергии для воды .... 2 балла
2. Выражение для силы тока с учетом ЭДС индукции .... 2 балла
3. Уравнение для скорости катера .... 1,5 балла
4. Формула для скорости катера .... 0,5 балла
5. Численное значение скорости катера .... 0,5 балла
6. Формула для силы тяги катера .... 1,5 балла
7. Численное значение силы тяги катера .... 0,5 балла
8. Найдена полезная мощность .... 0,5 балла
9. Найден КПД .... 1 балл

Динамический метод (8 баллов)

1. Использовано утверждение $T = F_A$ или ЗСИ для потока через канал ..... 1 балл
2. Выражение для силы тока с учетом ЭДС индукции .... 2 балла
3. Уравнение для силы тяги катера через разность скоростей или уравнение для скорости катера из ЗСИ .... 2 балла
4. Формула для скорости катера .... 0,5 балла
5. Численное значение скорости катера .... 0,5 балла
6. Численное значение силы тяги катера .... 0,5 балла
7. Найдена полезная мощность .... 0,5 балла
8. Найден КПД .... 1 балл

Возможное решение Т-11-5

1. В отсутствие рефракции лучи сходятся под тем же углом, под которым Солнце видно с Земли, то есть 2δ , поэтому $L_1 = R/\delta \approx 1{,}4 \cdot 10^6$ км. Из второго закона Ньютона для движения Луны по орбите радиуса R_0 с угловой скоростью ω_0:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{GM_З}{R_0^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0^3}}, \qquad \text{откуда} \qquad R_0 = \sqrt[3]{\frac{gT_0^2R^2}{4\pi^2}} \approx 384 \text{ тыс. км.}$$

Отсюда находим диаметр Луны $D = 2\delta R_0 \approx 3{,}45 \cdot 10^3$ км, а также диаметр темного пятна на уровне Луны (Рис. 2):

$$D_1 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_1}\right) \approx 9{,}3 \cdot 10^3 \ .$$

Тогда продолжительность полного лунного затмения:

$$T = \frac{D_1 - D_2}{\omega_0 R_0} = T_0\frac{D_1 - D_2}{2\pi R_0} \approx 1{,}6 \text{ ч}$$

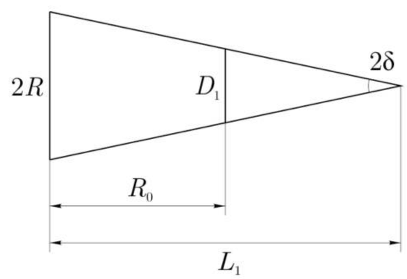

Рис. 11.5

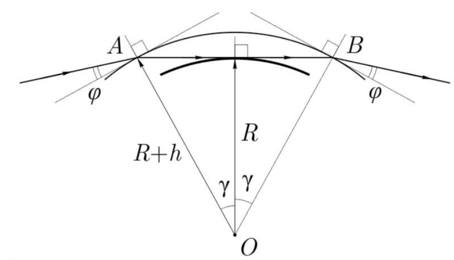

Рис. 11.6

2. Запишем закон Снелла при преломлении луча на границе с атмосферой:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = n\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right).$$

Учитывая, что $n = 1 + \Delta n$, где $\Delta n = 2{,}8 \cdot 10^{-4} \ll 1$, а также используя приближение малых углов, перепишем формулу в виде

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} = (1 + \Delta n)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right).$$

Раскроем скобки, пренебрегая слагаемым третьего порядка малости: $(\gamma^2 - \varphi^2)/2 = \Delta n$, что можно приближённо записать как $\gamma(\gamma - \varphi) = \Delta n$, откуда находим угол отклонения луча:

$$\Delta\varphi = \gamma - \varphi = \frac{\Delta n}{\gamma}.$$

Как видно из рис. 11.6, $\cos\gamma = R/(R+h)$, откуда:

$$\gamma \approx \sin\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{R}{R+h}\right)^2} \approx \frac{\sqrt{2Rh}}{R+h} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Луч претерпевает два одинаковых отклонения: при входе в атмосферу и при выходе из неё, поэтому результирующий угол будет равен $2\Delta\varphi$. Таким образом, в условиях рефракции угол ψ, под которым сходятся солнечные лучи, оказывается равным $\psi = 2\delta + 4\varphi$.

Окончательно получим:

$$L_2 = \frac{2R}{2\delta + 4\Delta\varphi} = \frac{R}{\delta + \Delta n\sqrt{2R/h}} \approx 408 \text{ тыс. км.}$$

Отсюда находим диаметр тёмного пятна на луне

$$D_2 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_2}\right) \approx 753 \text{ км}$$

и искомое отношение площадей $\varepsilon = (D_2/D)^2 \approx 4{,}8\,\%$.

Критерии оценивания Т-11-5

1. Найдено расстояние $L_1 = \frac{R}{\delta} = 1{,}4 \cdot 10^6$ км .... 1 балл
2. Получена верная формула для расстояния до Луны .... 0,5 балла
3. Решена геометрическая задача: $D_2 = 2\delta R_0$ или D_1/R_0
   $D_1 = 2\delta(L_1 - R_0) = 2R(1 - R_0/L_1)$ .... 1,5 балла
4. Найдено время затмения $T = \frac{D_1 - D_2}{\omega_0 R_0} = 1{,}6$ ч .... 1 балл
5. Правильно построена геометрия хода лучей, найден $\cos\gamma = \frac{R}{R+h}$ .... 1 балл
6. Записан закон Снелла при условии пункта 5 .... 1 балл
7. Идея того, что $\theta = 2\delta\beta$ .... 1 балл
8. Найдено $L_2 = \frac{R}{\delta + 2\beta\delta} = 389 \cdot 10^3$ км .... 1 балл
9. Получен размер тени $D_2 = 2R(1 - R_0/L_2)$ .... 1 балл
10. Найдено отношение площадей $\varepsilon = (D_2/D)^2 = 0{,}0024$ .... 1 балл