Возможные решение и критерии оценивания

Возможное решение Т-9-1

При движении со скоростью v расстояние L катер преодолевает за время $\tau = \dfrac{L}{v}$. При этом мощность сил сопротивления равна $N = Fv = kv^2$, где k – размерный коэффициент. Так как по условию массовый расход топлива линейно зависит от мощности сил сопротивления $\mu = \mu_0 + \alpha N$, где μ_0 и α – размерные коэффициенты, то линейный расход топлива равен $\lambda = \dfrac{\mu\tau}{L} = \alpha v + \dfrac{\mu_0}{v}$.

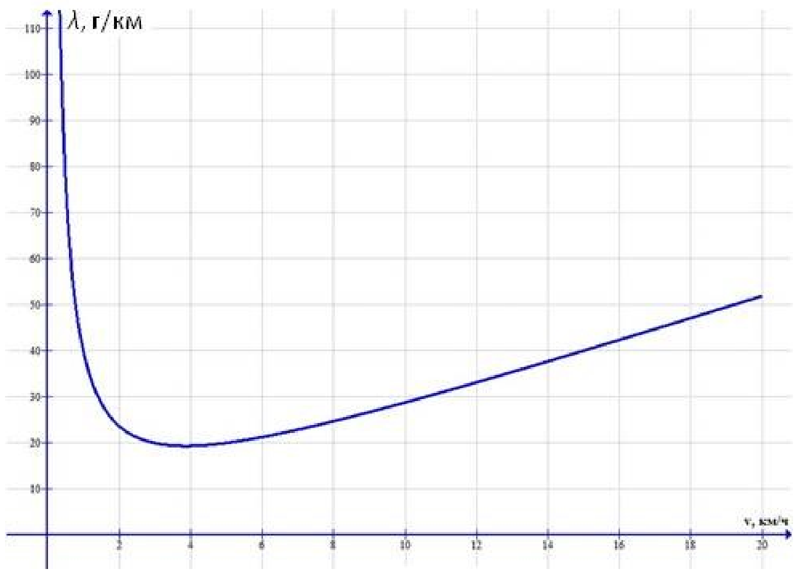


Рис. 9.10

Найдем константы α и μ_0 по известным значениям v_1, λ_1, v_2 и λ_2. Для этого запишем уравнения для линейного расхода $\lambda_1 = \alpha v_1 + \dfrac{\mu_0}{v_1}$ и $\lambda_2 = \alpha v_2 + \dfrac{\mu_0}{v_2}$. Решая систему, получим: $\alpha = \dfrac{\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}{v_1^2 - v_2^2} = 2{,}5\dfrac{\text{г}\cdot\text{ч}}{\text{км}^2}$ и $\mu_0 = \dfrac{v_1 v_2(v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1)}{v_1^2 - v_2^2} = 37{,}5\dfrac{\text{г}}{\text{ч}}$. С учетом найденных размерных коэффициентов уравнение для линейного расхода приобретает вид: $\lambda = 2{,}5v + \dfrac{37{,}5}{v}$. График этой зависимости представлен на рисунке 9.10.

В режиме холостого хода двигатель неподвижной модели сможет проработать $\tau_x = \dfrac{M}{\mu_0} = 160$ мин. Умножив полученное выражение для λ на v, получим квадратное уравнение (с размерными коэффициентами, полученными ранее)

$$2{,}5v^2 - \lambda v + 37{,}5 = 0, \tag{9.1}$$

дискриминант которого обращается в ноль при $\lambda_0 = 19{,}4$ г/км, что соответствует $v_0 = 3{,}87$ км/ч.

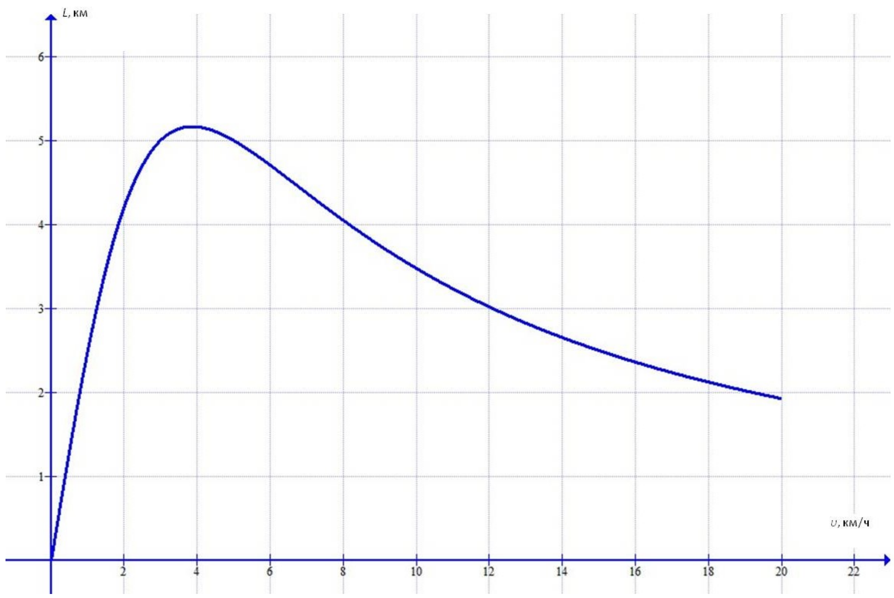


Рис. 9.11

Максимальное расстояние, на которое может уплыть модель, двигаясь с оптимальной скоростью, $L_0 = \dfrac{M}{\lambda_0} = 5{,}2$ км, и на его предоление требуется время $\tau_0 = \dfrac{L_0}{v_0} = 80$ мин. Зависимость предельной дальности движения от скорости приведена на рисунке 9.11.

Так как требуемое расстояние $L_1 = 3$ км меньше предельной дальности L_0, то модель не обязана придерживаться оптимальной стратегии и может плыть быстрее или медленнее. Из ранее полученного квадратного уравнения $2{,}5v^2 - \lambda v + 37{,}5 = 0$ с учетом $\lambda = \dfrac{M}{L_1} = \dfrac{100}{3}$ г/км. Выбирая при решении больший корень, находим максимально допустимую скорость $v_{11} = 12{,}1$ км/ч, при которой еще хватает топлива на заданной дистанции L_1, и получаем соответствующее ей минимально возможное время движения 15 мин. Большему корню $v_{12} = 1{,}24$ км/ч соответствует максимально возможное время движения 145 мин. Окончательно получаем $\tau_1 \in [15 \text{ мин}; 145 \text{ мин}]$.

Критерии оценивания Т-9-1

1. Выражение для мощности двигателя через скорость .... 1 балл
2. Получена общая зависимость линейного расхода от скорости .... 1 балл

- $\mu = \lambda v$ .... 0,5 балла
- $\lambda = \dfrac{\mu_0}{\nu} + \alpha v$ .... 0,5 балла

3. Найдены значения коэффициентов зависимости $\lambda(v)$ .... 1 балл

- численное значение μ_0 .... 0,5 балла
  - если есть выражение для μ_0 без численного значения .. 0,3 балла
- численное значение α .... 0,5 балла
  - если есть выражение для α без численного значения ... 0,3 балла

4. Найдено максимальное время работы на холостом ходу .... 1 балл

- если есть выражение для τ_x без численного значения .... 0,5 балла

5. Найден минимальный линейный расход и оптимальная скорость .... 3 балла

- идея нахождения .... 1 балл
- численное значение λ_0 .... 1 балл
  - если есть выражение для λ_0 без численного значения .. 0,5 балла
- численное значение v_0 .... 1 балл
  - если есть выражение для v_0 без численного значения .. 0,5 балла

6. Найдено предельное расстояние и время движения до него .... 1 балл

- численное значение L_0 .... 0,5 балла
  - если есть выражение для L_0 без численного значения .. 0,3 балла
- численное значение τ_0 .... 0,5 балла
  - если есть выражение для τ_0 без численного значения .. 0,3 балла

7. Получен диапазон времен движения на заданную дальность .... 2 балла

- идея нахождения дипазона .... 1 балл
  - если идея нахождения не для всех значений τ_1 .... 0,5 балла

- найден диапазон времен движения .... 1 балл
  - если найдены не все значения τ_1 .... 0,5 балла

Примечание. Минус 0,1 балла за запись численных ответов с необоснованно завышенной точностью (слишком много значащих цифр).

Возможное решение Т-9-2

Так как паровоз находится в точке B и шлейф расположен западнее, можно сделать вывод, что дует восточный ветер (на запад).
Следовательно, расстояние между точками A и B в направлении с севера на юг (16 клеток = 800 м) определяет диаметр кольцевой линии (радиус $R = 400$м).

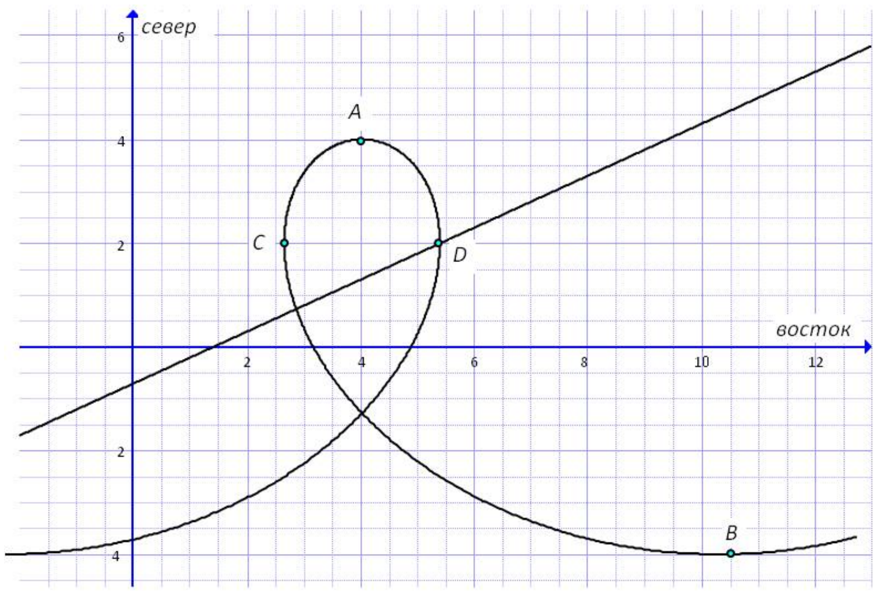


Рис. 9.12

Касательная к шлейфу в точке D направлена с севера на юг. По закону сложения скоростей такое возможно, если в системе отсчета паровоза скорость ветра w направлена вдоль меридиана. Так как точка D расположена южнее точки A на $R/2$, угол $\alpha = 30°$ и $v = 2u$.

Применим закон сложения скоростей. Шлейф дыма от паровоза, движущегося по прямолинейному пути, направлен вдоль скорости ветра относительно паровоза. Но сам паровоз может двигаться в двух разных направлениях.

Из произвольной точки проведем отрезок в западном направлении до пересечения со шлейфом (точка L). Это будет вектор скорости ветра u. Построим окружность вдвое большего радиуса с центром в точке O, точка пересечения которой со шлейфом K задаст направление KO вектора

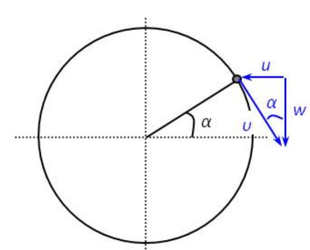


Рис. 9.13

скорости поезда относительно земли $v = 2u$. Скорость ветра в системе отсчета паровоза направлена вдоль шлейфа.

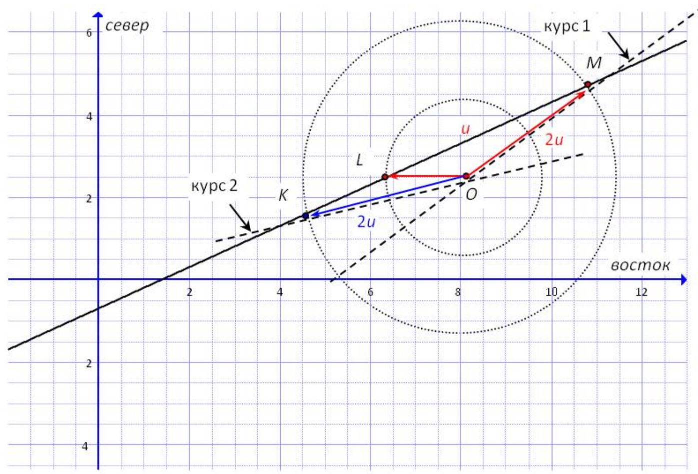


Рис. 9.14

Критерии оценивания Т-9-2

1. Определено направление ветра. .... 1 балл
2. Найден радиус железнодорожного кольца. .... 1 балл
3-5 Нахождение отношения скоростей поезда и ветра:

- решение через отношение путей:
  3. найден путь для дыма; .... 1 балл
  4. найден путь для паровоза; .... 1 балл
  5. найдено отношение скоростей $(1{,}93 \pm 0{,}05)$; .... 1 балл

- решение через закон сложения скоростей:
  3. использована связь направления шлейфа со скоростью
  ветра в СО паровоза; .... 1 балл
  4. использован закон сложения скоростей для точек C или D; .... 1 балл
  5. найдено отношение скоростей $\dfrac{v}{u} = 2$. .... 1 балл

6. Верно описаны построения (на основе закона сложения скоростей)
для нахождения направления прямого пути паровоза. .... 2 балла
7. Найдены направления прямого пути паровоза.

- верно найдено только одно направление; .... 1,5 балла

- верно найдены оба направления. .... 3 балла

Возможное решение Т-9-3

По закону Джоуля-Ленца тепловая мощность, выделяющаяся на спирали, равна

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0 + \alpha(t - t_0)} \tag{9.2}$$

Поскольку излучение и теплоотдача не учитывается, то количество теплоты, выделившееся за малое время $\Delta\tau$, идет на увеличение температуры спирали на Δt градусов:

$$N\Delta\tau = C\Delta t \tag{9.3}$$

Поэтому

$$\frac{U^2}{C}\Delta\tau = R(t)\Delta t \tag{9.4}$$

С помощью графика зависимости $R(t) = R_0 + \alpha(t - t_0)$ найдем время нагревания до t_1, так как согласно (9.4) оно пропорционально площади под этим графиком:

$$\frac{U^2}{C}\tau_1 = \frac{R_0 + (R_0 + \alpha(t_1 - t_0))}{2} \cdot (t_1 - t_0) \tag{9.5}$$

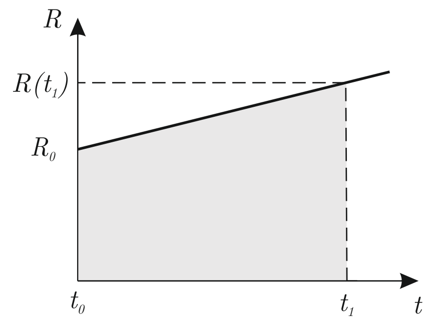


Рис. 9.15

Аналогично для нагревания до t_2:

$$\frac{U^2}{C}\tau_2 = \frac{R_0 + (R_0 + \alpha(t_2 - t_0))}{2} \cdot (t_2 - t_0) \tag{9.6}$$

Из (9.5) получаем:

$$C = \frac{2U^2\tau_1}{2R_0(t_1 - t_0) + \alpha(t_1 - t_0)^2} = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Дж}}{{}^\circ\text{C}} \tag{9.7}$$

Исключая C из (9.5) и (9.6), получаем квадратное уравнение:

$$\frac{\alpha}{2}(t_2 - t_0)^2 + R_0(t_2 - t_0) - \frac{\tau_2}{\tau_1}\left(\frac{\alpha}{2}(t_1 - t_0)^2 + R_0(t_1 - t_0)\right) = 0 \tag{9.8}$$

Откуда

$$t_2 = 188\,^\circ\text{C} \tag{9.9}$$

(отрицательный корень не имеет физического смысла)

Критерии оценивания Т-9-3

1. Получена формула (9.2). .... 1 балл
2. Получена формула $Q = c\Delta t$. .... 1 балл
3. Идея равенства теплот. .... 1 балл
4. Получена формула (9.4). .... 1 балл
5. Идея нахождения площади под графиком. .... 1 балла
6. Получена формула (9.5) или (9.6). .... 2 балла
7. Значение C. .... 1 балл
8. Значение t_2. .... 1 балла
9. Отброшен второй корень. .... 1 балл

Возможное решение Т-9-4

1. При крайних положениях движка реостата напряжение на одном из элементов X равно нулю, а на втором 10 В. Из графика видно, что через второй элемент при этом течет ток (200 ± 2) мА, значит, суммарная мощность $W_1 = (0 + 10 \cdot 0{,}2)$ Вт $= (2{,}00 \pm 0{,}02)$ Вт.

2. При центральном положении реостата получаем симметричную цепь, следовательно, напряжение на каждом из элементов X будет 5 В. По графику ток равен (60 ± 3) мА, и суммарная мощность $W_2 = (2 \cdot 5 \cdot 0{,}06)$ Вт $= (0{,}60 \pm 0{,}03)$ Вт.

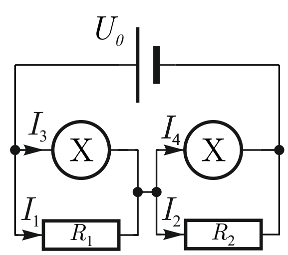
3. Исходя из 1 и 2 пунктов, логично предположить, что минимальная мощность достигается при центральном положении движка реостата. Сдвинем движок реостата из центрального положения в левую сторону. Пусть при этом напряжение на левом элементе уменьшилось на U' и стало $\dfrac{U_0}{2} - U'$, тогда на правом элементе напряжение стало равным $\dfrac{U_0}{2} + U'$. На левом элементе ток стал равен $I_0 + \Delta I_л$, а на правом $I_0 + \Delta I_п$, где I_0 – ток через элементы X при центральном положении движка реостата.

Выразим изменение мощности по сравнению с центральным положением движка реостата:

$$\Delta P = \left(\frac{U_0}{2} - U'\right)(I_0 + \Delta I_л) + \left(\frac{U_0}{2} + U'\right)(I_0 + \Delta I_п) - U_0 \cdot I_0 = \frac{U_0}{2}(\Delta I_л + \Delta I_п) + U'(\Delta I_п - \Delta I_л).$$

Заметим, что $\Delta I_п > 0$, а $\Delta I_л < 0$. Кроме того, так как график ВАХ по мере увеличения напряжения растет все быстрее, то $|\Delta I_п| > |\Delta I_л|$, поэтому $\Delta P > 0$ при любых U', значит, центральное положение движка реостата соответствует минимальной мощности. То есть $W_{min} = W_2$.

4. Нарисуем эквивалентную схему.



Сопротивление левого резистора $R_1 = 25$ Ом, а правого $R_2 = 75$ Ом. Пусть напряжение на левом резисторе равно U, токи через резисторы равны I_1 и I_2, а через элементы X – I_3 и I_4. Тогда можем записать:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{U_0 - U}{R_2} \\ I_1 + I_3 = I_2 + I_4 \end{cases}$$

Откуда получим $I_4 - I_3 = U\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) - \dfrac{U_0}{R_2} = U \cdot 0{,}053\ \text{Ом}^{-1} - 133$ мА.

Из полученного выражения видно, что по мере роста U от 0 до $\dfrac{U_0}{2}$ разность токов будет монотонно возрастать. Если же искать разность токов исходя из ВАХ, то по мере увеличения U разность токов будет монотонно убывать.

Последовательными приближениями подберем значение U, удовлетворяющее нашему выражению и ВАХ. Получим $U = (3{,}5 \pm 0{,}2)$ В. Тогда из графика находим токи через элементы X, примерно равные соответственно $I_3 = (35 \pm 4)$ мА и $I_4 = (87 \pm 5)$ мА. Суммарная выделяющаяся мощность

$$W = I_3 \cdot U + I_4(U_0 - U) = (0{,}035 \cdot 3{,}5 + 0{,}087 \cdot (10 - 3{,}5))\ \text{Вт} = (0{,}7 \pm 0{,}1)\ \text{Вт}.$$

Критерии оценивания Т-9-4

Вопрос №1.

1. Продемонстрировано понимание того, как текут токи, и определены напряжения на элементах X. .... 1 балл

2. Значение мощности $(2{,}00 \pm 0{,}02)$ Вт. .... 1 балл

Вопрос №2.

3. Продемонстрировано понимание того, как текут токи, и определены напряжения на элементах X. .... 1 балл

4. Значение мощности $(0{,}60 \pm 0{,}03)$ Вт. .... 1 балл*

Вопрос №3.

5. Указано, что минимальная мощность достигается при центральном положении движка реостата. .... 1 балл

6. Приведено корректное доказательство минимальности мощности. .... 2 балла

Вопрос №4.

7. Предложен корректный способ, позволяющий определить токи через элементы X. .... 2 балла

8. Значение мощности $(0{,}7 \pm 0{,}1)$ Вт. .... 1 балл*

* Баллы за численные значения ставятся только при использовании правильного метода. При попадании численного значения в двойные „ворота“ ставится 0,5 балла.

Возможное решение Т-9-5

1. Воспользуемся законом Снелла для преломления луча лазера:

$$n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2 \tag{9.10}$$

С учетом того, что коэффициент преломления воздуха равен 1, найдем условие полного внутреннего отражения:

$$\sin\alpha_{\text{крит}} = \frac{1}{n} \tag{9.11}$$

$$\alpha_{\text{крит}} = \omega\tau = \arcsin\frac{1}{n} \approx 49^\circ \tag{9.12}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{1}{n} \tag{9.13}$$

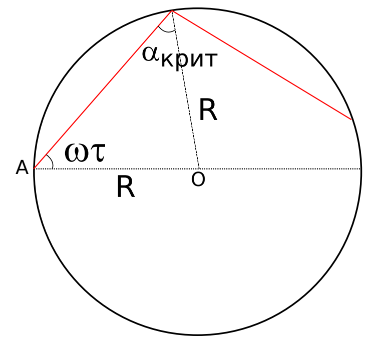


Рис. 9.16

2. Через время 1.5τ угол будет:

$$\beta = 1.5\omega\tau \approx 73^\circ \tag{9.14}$$

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta \approx 34^\circ \tag{9.15}$$

Так как $\gamma < 180^\circ$, то лазерный луч несколько раз отразится, прежде чем попадет на зачерненную половину поверхности сосуда. Посчитаем количество отражений n. Рассмотрим треугольники $\triangle AA_1O$, $\triangle AA_2O$, ..., $\triangle AA_nO$. Углы $\angle A_{k-1}A_kO$ и $\angle A_kA_{k+1}O$ $(k = 1,...,n)$ равны из условия отражения. Отсюда следует, что рассматриваемые треугольники равны, так как они равнобедренные, и углы при основании равны. Условие на количество отражений будет иметь вид:

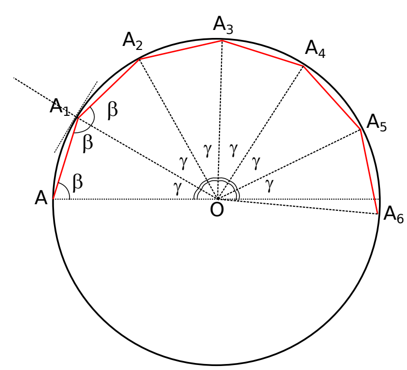


Рис. 9.17

$$n \cdot \gamma < 180^\circ < (n+1)\cdot\gamma \tag{9.16}$$

$$n < 5.3 < n+1 \tag{9.17}$$

Следовательно количество отражений $n = 5$. Тогда зависимость угловой координаты зайчика от времени $\varphi(t)$ в окрестности $t = 1.5\tau$ будет иметь вид:

$$\varphi(t) = (n+1)\gamma(t) = (n+1)(180^\circ - 2\beta(t)) = (n+1)(180^\circ - 2\omega t) = 1080^\circ - 12\omega t \tag{9.18}$$

Отсюда видно, что зависимость коодинаты от времени линейная, поэтому находим модуль угловой и линейной скоростей:

$$\omega_з = 12\omega \tag{9.19}$$

$$\upsilon_з = 12\omega R \tag{9.20}$$

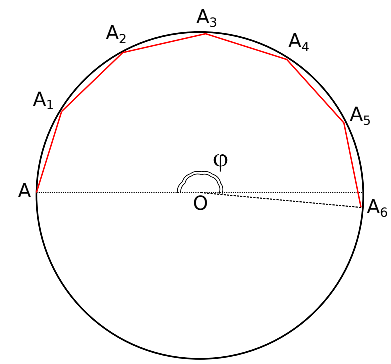


Рис. 9.18

Критерии оценивания Т-9-5

1. Условие (9.11) полного внутреннего отражения .... 2 балла
2. Найдено $\alpha_{\text{крит}}$ и τ .... 1 балл
3. Идея про несколько отражений .... 2 балла
4. Найдено число отражений при $t = 1.5\tau$ ...... 2 балла
5. Записана зависимость координаты от времени $\varphi(t)$ 1 балл
6. Найдена линейная и/или угловая скорость .. 2 балла