Решения и система оценивания

Задача 1

На фотографии показана роторная карусель, представляющая собой цилиндрический барабан, вращающийся вокруг вертикальной оси с частотой $\nu = 33$ оборота в минуту. Люди, которые первоначально стоят прислонившись спинами к внутренней вертикальной стенке барабана, движутся с центростремительным ускорением $3g$ ($g = 10$ м/с^2). В результате этого они «прилипают» к стенке барабана. Для пущего эффекта в некоторый момент пол автоматически опускается. Считая людей достаточно худыми, оцените радиус барабана этой карусели, а также минимальный коэффициент трения между людьми и стенкой барабана карусели, достаточный для того, чтобы люди не скользили вниз.

Возможное решение

Будем считать, что люди являются достаточно худыми, и для того чтобы сделать нужные оценки, пренебрежём их толщиной. Тогда из формулы для центростремительного ускорения, полагая его модуль равным $3g$, получаем:

$$3g = \omega^2 R = 4\pi^2\nu^2 R,$$

где $\omega = 2\pi\nu$. Отсюда

$$R = \frac{3g}{4\pi^2\nu^2}.$$

Частота ν – величина, обратная периоду обращения, который в данном случае равен 60/33 с. Следовательно, частота равна $\nu = 33/60$ Гц. Окончательно

$$R = \frac{3g}{4\pi^2\nu^2} \cong 2{,}5 \text{ м}.$$

Для ответа на второй вопрос запишем второй закон Ньютона для движения человека по окружности в проекции на вертикальную ось и на радиальное направление (m – масса человека, N – сила реакции стенки барабана, $F_{тр.}$ – модуль силы трения): $mg = F_{тр.}$, $3mg = N$.

Учтём, что если коэффициент трения минимален, то $F_{тр.} = \mu N$. Тогда из записанных уравнений находим: $\mu = 1/3$.

Критерии оценивания

Записана формула для центростремительного ускорения............................**1 балл**
Выражен радиус барабана...**1 балл**
Частота обращения выражена в единицах СИ...**1 балл**
Найдено численное значение радиуса барабана......................................**1 балл**
Записан второй закон Ньютона в проекции на радиальное направление......**2 балла**
Записан второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось ....**2 балла**
Выражен коэффициент трения и найдено его численное значение...........**2 балла**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.
При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл. Максимум за задание **– 10 баллов**.

Задача 2

В вертикальном цилиндрическом сосуде, частично заполненном тетрахлорметаном, имеющим плотность 1600 кг/м^3 и не смешивающимся с водой, плавает кусок льда массой 1 кг. Как и на сколько изменится высота уровня тетрахлорметана после того, как весь лёд растает? Площадь дна сосуда 200 см^2.

Возможное решение

Пусть h_1 – начальная высота уровня тетрахлорметана. Тогда давление на дно сосуда равно $\rho_т g h_1$, где $\rho_т$ – плотность тетрахлорметана.

После таяния льда давление на дно сосуда равно:

$$\rho_т g h_2 + \rho g H = \rho_т g h_2 + \frac{mg}{S},$$

где h_2 – конечная высота столба тетрахлорметана, ρ – плотность воды, H – высота столба воды. Масса содержимого сосуда не изменилась, следовательно, давление на дно в начальном и конечном состоянии равно, то есть:

$$\rho_т g h_1 = \rho_т g h_2 + \frac{mg}{S} \;\Rightarrow\; \Delta h = h_2 - h_1 = -\frac{m}{\rho_т S} = -3{,}125 \text{ см}.$$

Таким образом, высота уровня тетрахлорметана понизится на $\Delta h = 3{,}125$ см.

Критерии оценивания

Использована идея о равенстве давлений/сил давления у дна сосуда ......**2 балла**
Записаны формулы для давлений на дно до и после таяния льда (по 2 балла)..**4 балла**
Давление воды выражено через её массу ....**1 балл**
Получено выражение для изменения высоты уровня тетрахлорметана ....**2 балла**

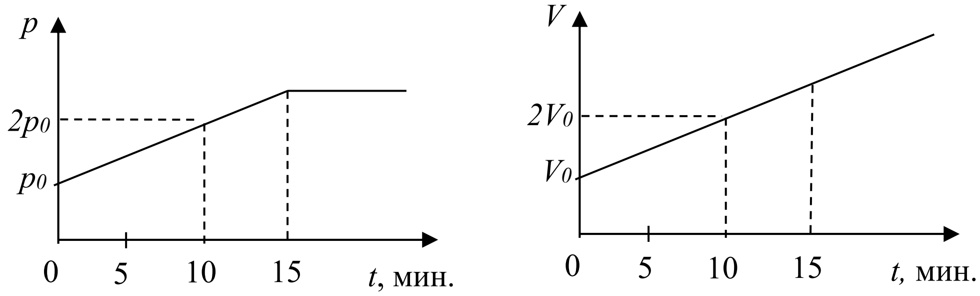
Найдено численное значение изменения высоты уровня тетрахлорметана и сделан вывод о его понижении ....**1 балл**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.

При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл. Максимум за задание **– 10 баллов**.

Задача 3

На графиках приведены зависимости от времени t давления p и объёма V одного моля одноатомного идеального газа. Определите, как со временем изменялась теплоёмкость данного количества газа. Постройте график зависимости этой теплоёмкости от времени.



Возможное решение

В течение первых 15 минут зависимость давления газа от его объёма имеет вид $p(V) = \frac{p_0}{V_0}V$. Пусть в некоторый произвольный момент времени (в интервале от 0 мин. до 15 мин.) давление газа равно p_1, а занимаемый им объём равен V_1. Запишем для процесса перехода из состояния (p_0, V_0) в состояние (p_1, V_1) первое начало термодинамики:

$$C\Delta T = \frac{3}{2}R\Delta T + \Delta A.$$

Здесь C – теплоёмкость одного моля газа в рассматриваемом процессе, ΔT – изменение температуры газа, ΔA – работа, которую совершает газ. Она численно равна площади фигуры под графиком зависимости $p(V)$, и эта фигура – трапеция.

Перепишем последнее выражение, воспользовавшись уравнением состояния $pV = RT$ для одного моля идеального газа:

$$\frac{C}{R}\Delta(pV) = \frac{3}{2}\Delta(pV) + \Delta A$$

или

$$\left(\frac{C}{R}-\frac{3}{2}\right)\Delta(pV)=\left(\frac{C}{R}-\frac{3}{2}\right)(p_1V_1-p_0V_0)=\frac{1}{2}(p_0+p_1)(V_1-V_0).$$

Учтём, что $p_1=\frac{p_0}{V_0}V_1$. Тогда

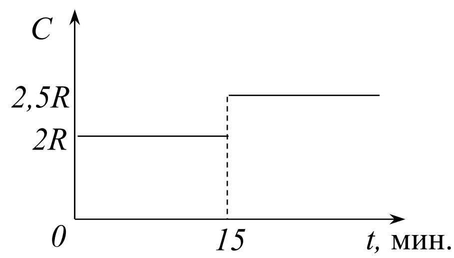
$$\left(\frac{C}{R}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{p_0}{V_0}V_1^2-p_0V_0\right)=\frac{1}{2}\left(p_0+\frac{p_0}{V_0}V_1\right)(V_1-V_0),$$

откуда следует

$$\frac{C}{R}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2},$$

то есть $C=2R$.

Заметим, что давление p_1 и объём V_1, взятые в произвольный момент времени, при проведении выкладок сокращаются. Это справедливо, в том числе и для двух произвольных состояний газа, разделённых очень малым промежутком времени. Это доказывает, что теплоёмкость в рассматриваемом процессе является постоянной величиной, то есть она будет равна $2R$ в любой момент в течение первых 15 минут.



По истечении первых пятнадцати минут процесс становится изобарическим. Следовательно, при этом $C=\frac{5}{2}R$.

Соответствующий график зависимости теплоёмкости одного моля одноатомного идеального газа от времени изображён на рисунке.

Критерии оценивания

Получена зависимость давления от объёма для первого процесса..............**1 балл**
Записано первое начало термодинамики для изменения температуры газа при переходе в произвольное промежуточное состояние (в интервале от 0 мин. до 15 мин.)..**1 балл**
Записано выражение для работы газа при переходе в промежуточное состояние.. **1 балл**
Найдена теплоёмкость в первом процессе и доказано, что она является постоянной величиной (если нет обоснования постоянства теплоёмкости, то за этот пункт ставится 2 балла) ....**3 балла**
Указано, что второй процесс изобарический ....**1 балл**
Указана теплоёмкость во втором процессе ....**1 балл**
Построен график, на котором указаны характерные значения ....**2 балла**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.
При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл.
Максимум за задание **– 10 баллов**.

Задача 4

В точку A поместили первый точечный заряд, и он создал в точке B потенциал 2 В. Затем первый заряд убрали, и в точку B поместили второй точечный заряд. Он создал в точке A потенциал 9 В. Далее первый заряд вернули обратно в точку A. С какой силой взаимодействуют эти заряды?

Возможное решение

Пусть модули зарядов, которые помещали в точки A и B, равны q_1 и q_2 соответственно, а расстояние между ними равно R. Записывая формулы для потенциалов, создаваемых точечными зарядами в точках B и A, получим:

$$\varphi_B = k\frac{q_1}{R}, \qquad \varphi_A = k\frac{q_2}{R}.$$

Согласно закону Кулона, искомая сила взаимодействия зарядов равна:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{R^2}.$$

С учётом записанных выражений для потенциалов получим:

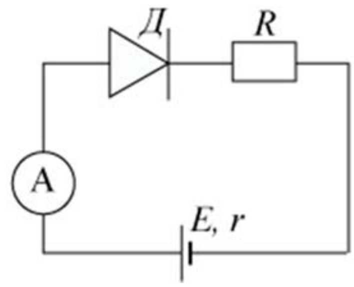
$$F = \frac{\varphi_A \varphi_B}{k} = 2\cdot 10^{-9}\ \text{Н} = 2\ \text{нН}.$$

Критерии оценивания

Записаны формулы для потенциалов точечных зарядов (по 2 балла)........**4 балла**
Записан закон Кулона ....**2 балла**
Получено выражение для силы взаимодействия зарядов ....**2 балла**
Найдено численное значение силы ....**2 балла**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.
При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл.
Максимум за задание **– 10 баллов**.

Задача 5



Определите показание идеального амперметра в цепи, схема которой приведена на рисунке. Зависимость силы тока I, протекающего через диод $Д$, от напряжения U на нём описывается выражением: $I = \alpha U^2$, где $\alpha = 0{,}02$ А/В^2. ЭДС источника $E = 50$ В. Внутреннее сопротивление источника напряжения и резистора равны $r = 1$ Ом и $R = 19$ Ом, соответственно.

Возможное решение

Запишем закон Ома для участка цепи, включающего в себя резистор, источник напряжения и амперметр:

$$I(R+r) = E - U,$$

где I – сила тока, текущего через диод (и через амперметр), U – напряжение на диоде.

Используя вольт-амперную характеристику диода, получаем:

$$I(R+r) = E - \sqrt{\frac{I}{\alpha}} \;\Rightarrow\; \alpha(R+r)^2 I^2 - (2\alpha E(R+r) + 1)I + \alpha E^2 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим:

$$I_0 = \frac{1 + 2\alpha E(R+r) - \sqrt{1 + 4\alpha E(R+r)}}{2\alpha (R+r)^2} = 2 \text{ А}.$$

Второй корень квадратного уравнения, соответствующий знаку «+» перед квадратным корнем (3,125 А), не является корнем исходного уравнения. Это можно установить либо при помощи непосредственной подстановки в указанное исходное уравнение, либо заметив, что сила тока, протекающего через амперметр в данной цепи, не может превышать $I_{\max} = \frac{E}{R+r} = 2{,}5$ А.

Решение задачи выглядит несколько проще, если сразу подставлять в получаемые уравнения числа. Например, перепишем закон Ома в виде:

$$\alpha U^2 (R+r) = E - U.$$

Корень этого уравнения соответствует пересечению параболы

$$y_1(U) = \alpha U^2 (R+r) = 0{,}4U^2$$

и графика линейной функции

$$y_2(U) = E - U = 50 - U.$$

Пересечение происходит в точке с абсциссой $U_0 = 10$ В (это можно установить либо аналитически, решив соответствующее квадратное уравнение, либо графически). При таком напряжении на диоде сила текущего через него тока равна:

$$I_0 = \alpha U_0^2 = 2 \text{ А}.$$

Критерии оценивания

Записан закон Ома для участка цепи (или для полной цепи).....................**2 балла**
Получено квадратное уравнение относительно силы тока или напряжения...**2 балла**
Получено решение квадратного уравнения (любым способом) и, при необходимости, обоснованно исключён лишний корень ....**4 балла**
Найдено численное значение силы тока..**2 балла**

За каждое верно выполненное действие баллы складываются.
При арифметической ошибке (в том числе ошибке при переводе единиц измерения) оценка снижается на 1 балл. Максимум за задание **– 10 баллов**.

Всего за работу – **50 баллов**.