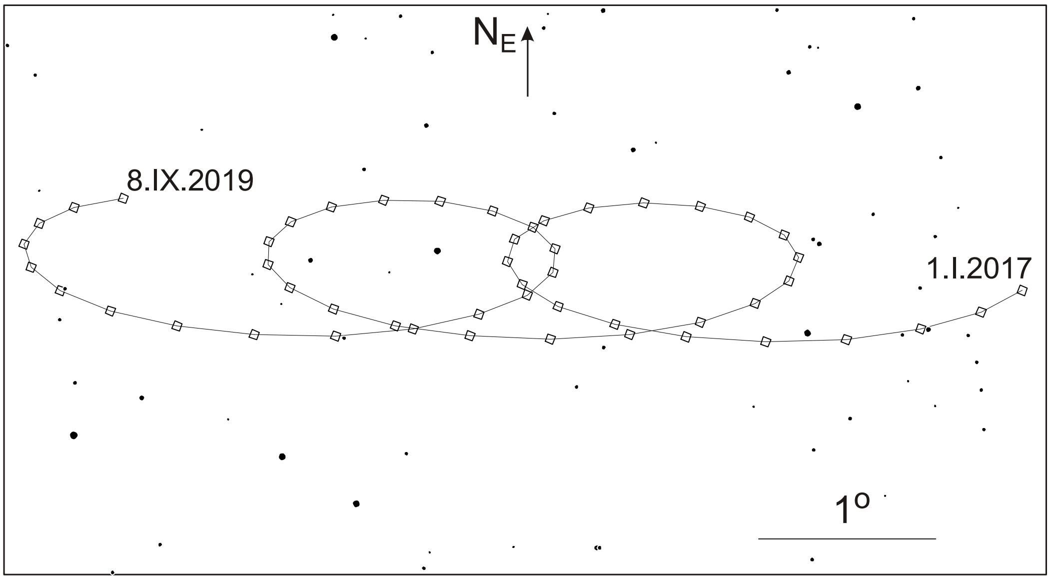
X/XI.7 ДАЛЕКИЙ ОБЪЕКТ

О.С. Угольников

Условие. Вы видите карту видимого пути среди звезд объекта пояса Койпера вблизи его перигелия за несколько лет. Направление вверх соответствует направлению на северный полюс эклиптики, указан масштаб карты и даты начала и конца трека. Интервалы между соседними отметками на треке соответствуют 20 дням. Определите по этой карте:

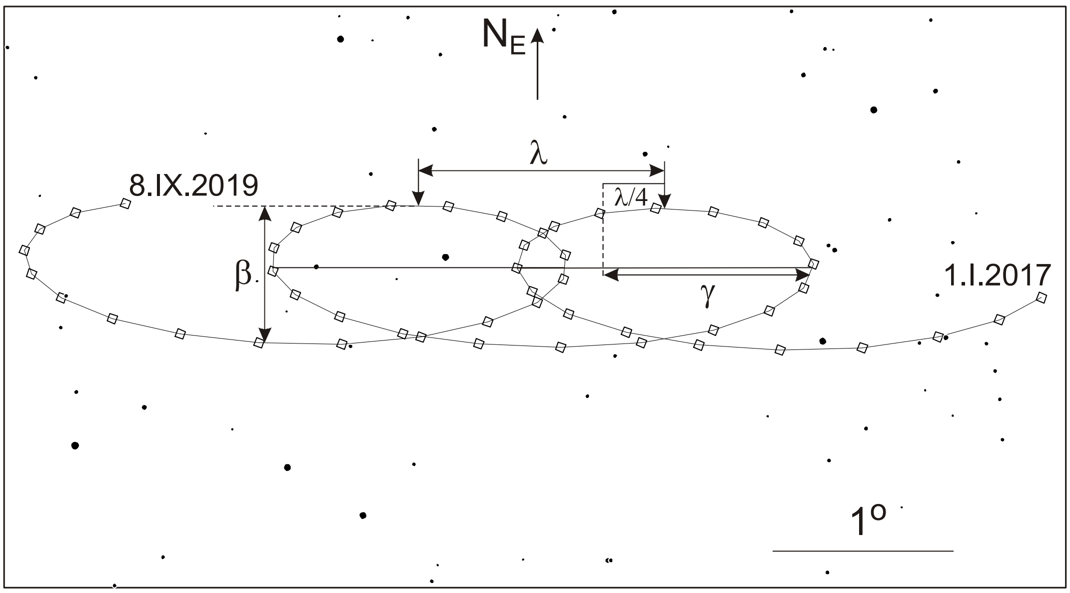
1) Расстояние объекта от Солнца;
2) Его орбитальный период;
3) Созвездие, в котором находится объект.



Решение. На звездной карте не указаны координаты, дан лишь масштаб. Однако мы можем отметить ряд обстоятельств, которые облегчают решение задачи. Среднее по времени движение объекта среди звезд направлено с запада на восток, с периодами попятного движения, как у внешних планет. Следовательно, объект движется вокруг Солнца в прямом направлении. Его петли симметричны относительно вертикальной оси, их положение соответствует одной и той же эклиптической широте (ординате на рисунке). Следовательно, гелиоцентрическая эклиптическая широта объекта в период наблюдений примерно постоянна.

Середина участка попятного движения соответствует противостоянию объекта. По отметкам мы можем установить, что оно происходит во второй половине сентября, вблизи осеннего равноденствия. Отметим положение объекта во время двух последовательных противостояний и найдем угловое расстояние между этими положениями:

$$\lambda = 1.37°.$$



Во время противостояний геоцентрическая и гелиоцентрическая эклиптическая долгота объекта совпадают. Если считать орбиту Земли круговой, то противостояния отстоят друг от друга на T=(361.4/360) или 1.004 года. Этот период можно считать равным одному году. Отсюда мы можем определить гелиоцентрическую угловую скорость объекта:

$$\omega = \lambda/T = 1.37° \text{ /год.}$$

Вычислить сразу расстояние объекта от Солнца по его синодическому периоду нельзя, так как мы не знаем эксцентриситет орбиты. Для вычисления расстояния определим его годовое параллактическое смещение во время квадратуры. Так как объект расположен значительно дальше от Солнца, чем Земля, квадратура наступает через четверть года после противостояния. Находим положение объекта в это время и отмечаем его гелиоцентрическое положение, смещенное на угол $\lambda/4$ к востоку по отношению к положению противостояния. Параллактический угол равен

$$\gamma = 1.15°.$$

Отсюда мы вычисляем расстояние планеты от Солнца в астрономических единицах:

$$r = 1/\sin\gamma = 50 \text{ а.е.}$$

Объект находится вблизи перигелия, и мы можем найти эксцентриситет его орбиты:

$$e = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = 0.8.$$

Здесь ω_0=1.02°/год – угловая скорость кругового движения, соответствующего данному расстоянию от Солнца. Большая полуось орбиты объекта равна 250 а.е., а период обращения – примерно 4000 лет.

Приведенный выше способ определения расстояния объекта от Солнца и его периода обращения не является единственным. Можно также измерить угловые скорости перемещения объекта по небу во время соединения (середина длинной дуги видимого пути объекта) и противостояния (середина короткой дуги):

$$\omega_1 = 0.023° \text{ /день;} \quad \omega_2 = -0.016° \text{ /день.}$$

Знак «–» соответствует попятному движению астероида. Будем считать, что наклон орбиты астероида к плоскости эклиптики небольшой (в этом мы убедимся далее), а его скорость на интервале двух лет вблизи перигелия постоянна. Орбиту Земли мы можем считать круговой. Тогда в соединении расстояние до астероида можно считать равным ($r + r_E$), где r_E – радиус орбиты Земли, а скорости астероида и Земли v и v_E противоположны. В противостоянии расстояние уменьшается до ($r - r_E$), а скорости сонаправлены. Запишем выражения для угловых скоростей:

$$\omega_1 = \frac{v + v_E}{r + r_E}; \quad \omega_2 = \frac{v - v_E}{r - r_E}.$$

Решая эти уравнения, мы получаем выражение для расстояния астероида от Солнца:

$$r = \frac{2v_E - r_E(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} = r_E \frac{2\omega_E - \omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Здесь $\omega_E = v_E/r_E$ – угловая скорость орбитального движения Земли (0.986° /день). Мы получаем значение r, равное 50 а.е. Далее мы определяем линейную и угловую гелиоцентрическую скорость объекта:

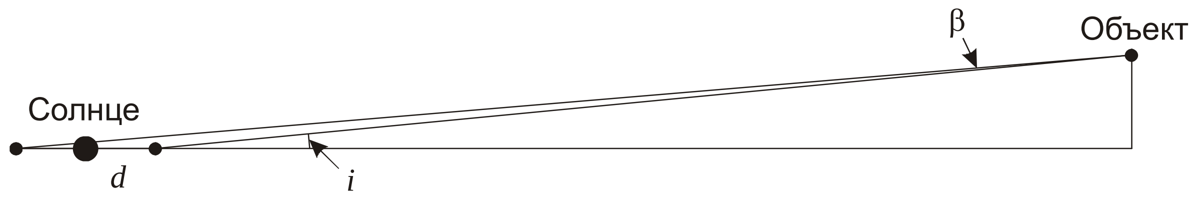
$$v = r_E \frac{\omega_E(\omega_1 + \omega_2) - 2\omega_1\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}; \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{\omega_E(\omega_1 + \omega_2) - 2\omega_1\omega_2}{2\omega_E - \omega_1 - \omega_2} \sim 1.4^{\mathrm{O}} / \text{год}.$$

Это близко к полученному выше значению, но имеет худшую точность, так как базируется на измерении более коротких отрезков на звездной карте.

Чтобы определить созвездие, нам нужно найти примерное значение угла наклона гелиоцентрического направления на объект к эклиптике. Для этого найдем вертикальный размер петли, описываемой объектом на небе:

$$\beta = 0.76°.$$

В противостоянии объект пояса Койпера находится на 2 а.е. ближе к Земле, чем в соединении и за счет этого виден на большем угловом расстоянии к северу от эклиптики.



Так как нас интересует примерное значение угла i, мы можем учесть, что объект значительно дальше от Солнца, чем Земля. Угол составляет

$$i = \arcsin \frac{r \sin\beta}{2d} = 20^{\mathrm{O}}.$$

Астероид вступает в противостояние вблизи осеннего равноденствия. Следовательно, он находится в 20° по направлению к северному полюсу эклиптики от точки весеннего равноденствия. Это соответствует созвездию Пегаса.

Система оценивания (от одного члена жюри). В задании нужно ответить на три вопроса, каждый из ответов оценивается по 4 балла. Первый вопрос связан с вычислением текущего расстояния от Солнца до объекта. Самым правильным способом является вычисление годового параллактического смещения объекта на небе вблизи его квадратуры. Вместо этого участник олимпиады может вычислить расстояние от Солнца до объекта по анализу угловых скоростей. Допускается неточность определения параллакса или расстояния в пределах 5%. Данный этап оценивается в 4 балла. Вероятными ошибками участников олимпиады могут быть:

1) Вычисление параллакса как полуширины петли видимого движения объекта (без слагаемого $\lambda/4$ в решении выше). Тогда параллакс получается равным 0.8°, расстояние – около 70 а.е. В этом случае за выполнение данного этапа выставляется 2 балла. Данная ошибка также приводит к неверному ответу на другие вопросы задания. В частности, эксцентриситет орбиты объекта превышает единицу (около 4), и орбитального периода не существует. Ввиду абсурдности ответа в этом случае за второй этап выставляется 0 баллов, он также не оценивается, если в нем получается другой ответ из-за ошибок при вычислениях. На ответ на третий вопрос данная неточность не влияет, и в случае верного выполнения он оценивается в полной мере.

2) Расстояние объекта может быть вычислено по III закону Кеплера на основе синодического периода объекта или его смещения по небу за год. Фактически это означает предположение круговой орбиты объекта. В этом случае орбитальный период составляет около 260 лет, расстояние от Солнца – около 40 а.е. При таком выполнении за оба первых этапа выставляется по 1 баллу, третий при условии правильного выполнения оценивается в полной мере. При получении других ответов (в том числе правильного – 50 а.е.) за первый этап при такой методике оценка ***не может*** быть увеличена.

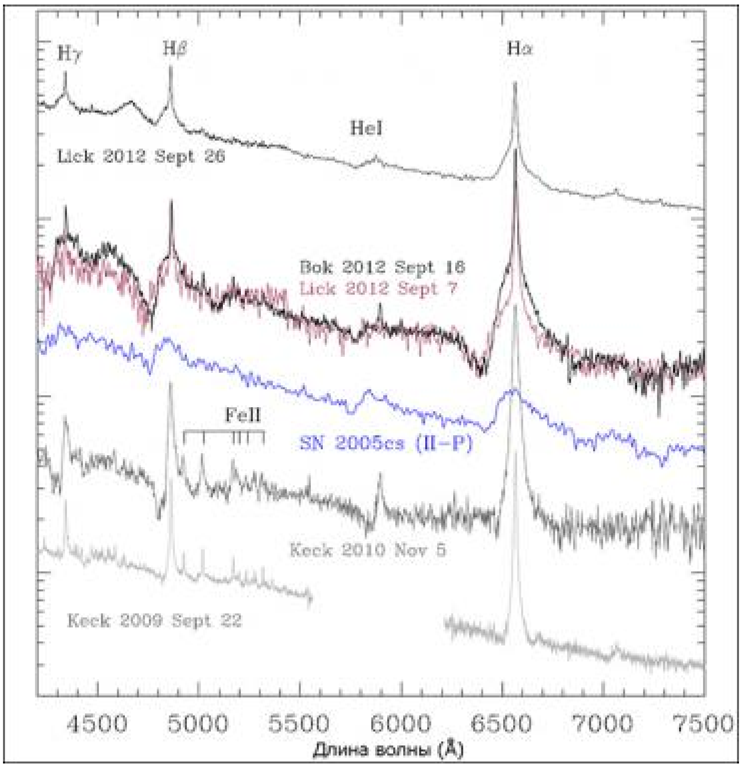
Второй этап состоит в вычислении орбитального периода объекта пояса Койпера и также оценивается в 4 балла. Для выполнения этого этапа необходимо определить эксцентриситет и большую полуось орбиты. Другой путь состоит в вычислении линейной скорости в перигелии. Если же орбита предполагается круговой, то оценка за весь второй этап не может превышать 1 балл. Оценка не снижается, если эксцентриситет попадает в интервал от 0.7 до 0.9, а орбитальный период – от 2200 до 11000 лет. При больших ошибках (эксцентриситет от 0.6 до 1.0) оценка за второй этап уменьшается на 2 балла, если это вызвано только ошибками измерений. При еще большей погрешности или при наличии физических ошибок или применений неверных формул (вне зависимости от ответа) оценка за весь этап не превосходит 1 балла.

Третий этап состоит в определении созвездия, в котором находился объект, и оценивается в 4 балла. Если при этом не производится правильных по методике вычислений видимой эклиптической широты объекта, то оценка составляет 1 балл в случае правильного ответа (Пегас) и 0 баллов во всех остальных случаях. Если широта вычисляется правильно, то оценка составляет не менее 2 баллов плюс еще 2 балла при правильно указанном созвездии. Ответ – созвездие Рыб, содержащее точку весеннего равноденствия – правильным не является.

X/XI.8 НЕОБЫЧНАЯ СВЕРХНОВАЯ

О.С. Угольников

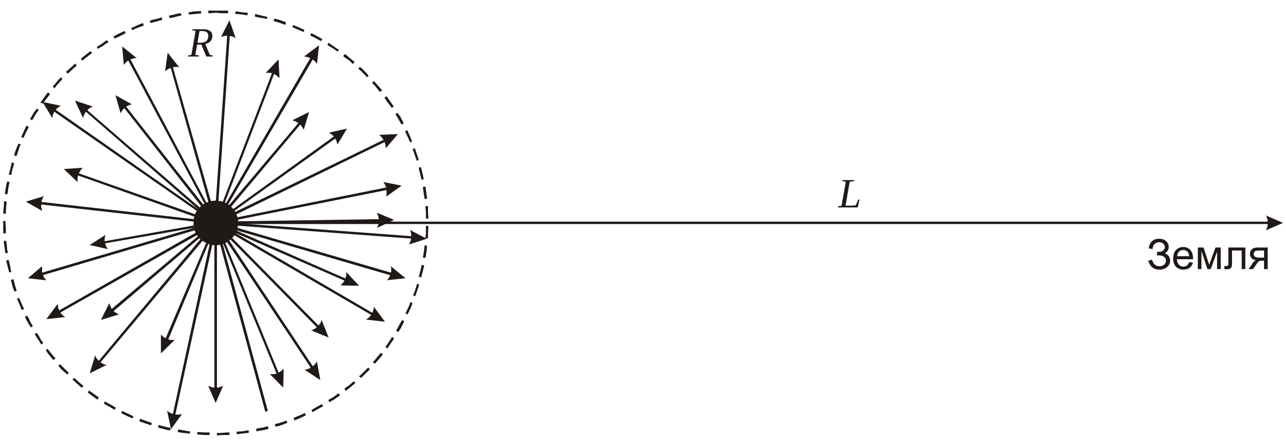
Условие. Перед Вами спектр интересной сверхновой звезды SN 2009ip (сливающиеся черная и красная линии с подписями Bok 2012 и Lick 2012). Основная вспышка этой звезды состоялась в сентябре 2012 года, после нескольких предварительных вспышек. Сверхновая располагается в галактике NGC 7259 (**10 класс**: расстояние 25 Мпк; **11 класс**: красное смещение z = 0.006). Оцените угловой диаметр туманности – остатка вспышки Сверхновой при наблюдении с Земли в марте 2018 года. Считать, что туманность появилась только после основной вспышки.



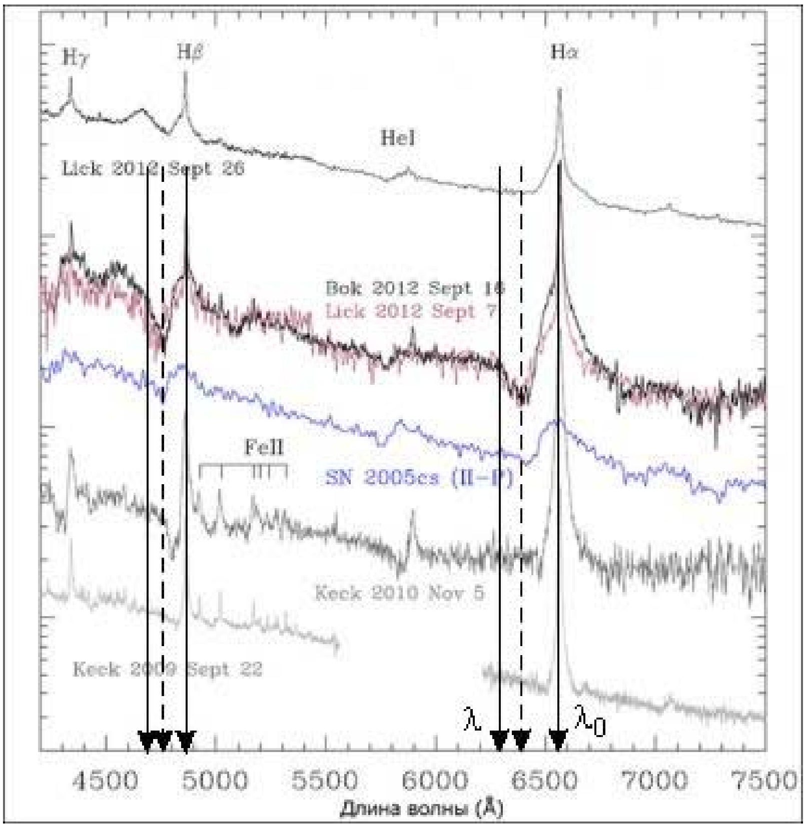
Решение. (**11 класс**). Из данных условия задачи мы сразу можем определить лучевую скорость галактики в целом: $v_G = c\ z = 1800$ км/с и расстояние до галактики по закону Хаббла:

$$L = \frac{v_G}{H} = \frac{c \cdot z}{H} \approx 25 \text{ Мпк.}$$

(**10-11 класс**). Теперь рассмотрим спектры сверхновой. В них присутствуют яркие эмиссионные линии атомарного водорода, самая заметная из которых – Hα с длиной волны около 6550 ангстрем. Однако левее этой линии, на чуть меньших длинах волн, видна достаточно четкая линия поглощения. Это не есть случайная близость двух линий, такая же компонента присутствует и у линии Hβ и, на самом краю рисунка, у линии Hγ. Эта линия – результат поглощения света быстро расширяющейся оболочкой взорвавшейся звезды. Ее разные участки имеют разные направления скорости, но с Земли сильнее всего проявляет себя часть оболочки, летящая по направлению к нам. За счет очень большой скорости линия поглощения смещена в фиолетовую сторону относительно линии излучения самой звезды. Эту скорость мы можем определить из спектра.



Необходимо учитывать, что разные молекулы газа имеют разные скорости, что приводит к значительной ширине линии поглощения. Так как нас интересуют размеры туманности или, строго говоря, угловое расстояние от ее видимого центра до края, мы будем рассматривать самые быстрые молекулы, создающие левый край спектральной линии. Из графика определим длину волны левого крыла линии поглощения и линии излучения Hα самой звезды:



λ = 6300 А; λ_0 = 6560 А.

Длина волны λ_0 близка к лабораторной длине волны Hα, однако на нее, вообще говоря, может влиять лучевая скорость самой сверхновой звезды и ее галактики в целом. Отсюда мы получаем лучевую скорость самых быстрых атомов:

$$v = c\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = 12000 \text{ км/с}.$$

Примерно то же значение можно получить из анализа линии Hβ, однако там сложнее зафиксировать левый край линии поглощения. Полученная скорость очень велика, несопоставимо выше второй космической для окрестностей звезды, но все же заметно меньше скорости света. Поэтому для определения углового диаметра туманности при наблюдении в 2018 году достаточно определить ее линейный диаметр через время *T* (5.5 лет) после взрыва и поделить на расстояние:

$$\delta = \frac{2vT}{L} = \frac{28000 \text{ а.е.}}{25 \text{ Мпк}} \approx 0.001''.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). (11 класс). Первым и самым простым этапом решения является определение расстояния до галактики, что оценивается в 3 балла. В случае неверного применения закона Хаббла либо использования каких-либо других методов поиска расстояния, неприменимых в этой задаче, данные 3 балла не выставляются, а оставшиеся части решения оцениваются в зависимости от полученного значения расстояния и его реалистичности.

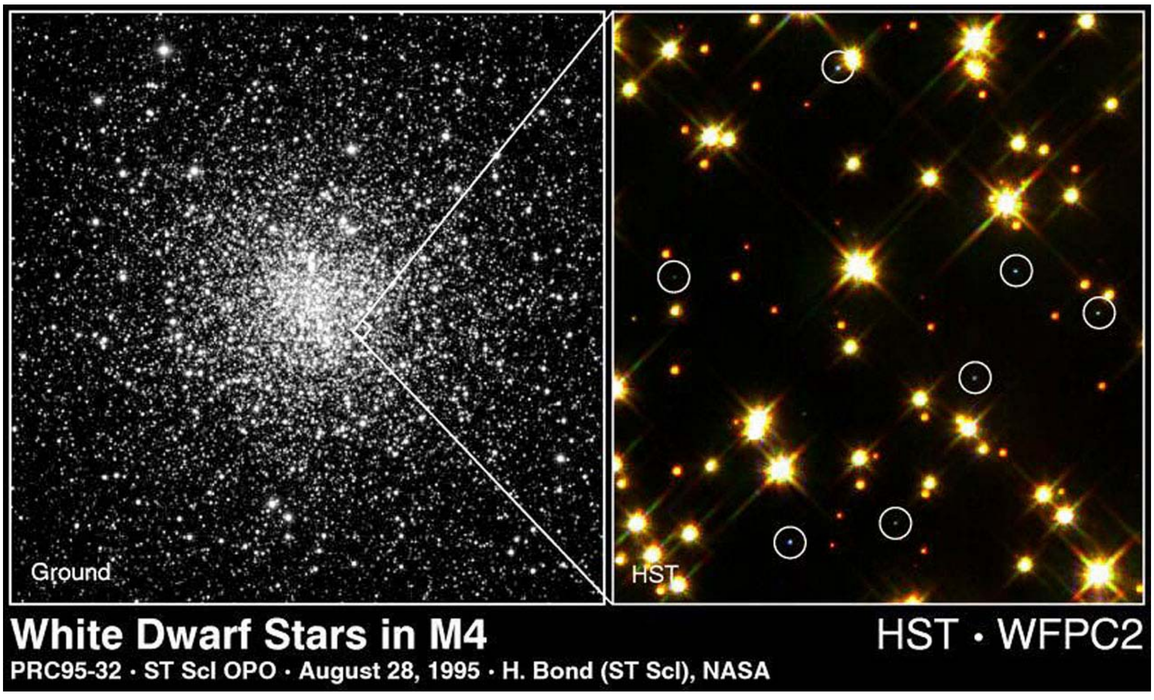
(**10-11 класс**). Вторая часть решения связана с вычислением скорости расширения туманности. Она оценивается только в том случае, если используется анализ линий поглощения слева от линий излучения водорода в спектре сверхновой. При любом другом способе за второй этап выставляется 0 баллов. Если лучевая скорость правильно определяется на основе сравнения левого края линии поглощения с центром линии излучения (Hα, Hβ или обеих сразу), то весь этап оценивается в 6 баллов (10 класс – 8 баллов). Если участник анализирует центр линии поглощения, что приводит к ответу, меньшему в 1.5-2 раза, весь этап оценивается в 4 балла (10 класс – 6 баллов), но дальнейшее решение оценивается в полной мере. Если в качестве длины волны λ_0 берется лабораторная величина для линии Hα или Hβ, оценка уменьшается на 1 балл (максимум за этап – 5 баллов в 11 классе и 7 баллов в 10 классе).

Наконец, вычисление видимого размера туманности оценивается в 3 балла (10 класс – 4 балла). Учет визуального ускорения расширения туманности в данном случае слаб, его учет не влияет на оценку при условии правильного выполнения. Если в качестве момента вспышки сверхновой берется 2009 год, что в полтора раза увеличивает время T – оценка за этап уменьшается на 1 балл.

XI.9 КАРЛИКИ В СКОПЛЕНИИ

О.С. Угольников

Условие. Перед Вами фото шарового звездного скопления M4 и его фрагмента, на котором Космическому телескопу им. Хаббла удалось запечатлеть белые карлики, обведенные на снимке кружками. Считая температуру поверхности белых карликов равной 12000 K, а размеры – аналогичными Земле, оцените начальную функцию масс скопления (распределение звезд по массам при их образовании). Найдите ее в виде $n(M) \sim M^{-N}$, где $n(M)$ – число звезд с массой больше M. Возраст скопления – 13 млрд лет.



Решение. Обозначив радиус белого карлика как R, а его температуру как T, найдем его светимость в единицах светимости Солнца:

$$\frac{L_W}{L_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = 1.3 \cdot 10^{-3}.$$

На правом снимке семь белых карликов видны на пределе чувствительности. Эти белые карлики – звезды, которые уже завершили свой эволюционный путь, пройдя стадии главной последовательности и красных гигантов. Возраст скопления (13 млрд лет) чуть больше времени жизни Солнца до стадии белого карлика τ_0 (12 млрд лет). Время жизни звезд с массой, близкой к солнечной, до превращения в белый карлик, равно

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{M_0}{M}\right)^3.$$

Здесь M_0 – масса Солнца. Приравняв время τ и возраст скопления, получаем минимальную массу звезды, успевшей превратиться в белый карлик:

$$\frac{M_W}{M_0} = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/3} \approx 1.$$

Получается, что в виде белых карликов мы наблюдаем практически все звезды с массой, большей массы Солнца, когда-то появившиеся в этом скоплении (разумеется, там были еще и более массивные звезды, закончившие свой жизненный путь в виде нейтронных звезд или черных дыр, но таких звезд было сравнительно мало).

Оценим теперь количество обычных звезд на этом же снимке, их около 100. Они удалены от нас на такое же расстояние, как белые карлики, и имеют светимость не меньше L. Это либо звезды главной последовательности с небольшой массой, либо красные гиганты, имеющие чуть большую массу и поэтому быстрее проходящие свой эволюционный путь. Самые слабые звезды, видимые на снимке, кроме белых карликов – это красные карлики, звезды главной последовательности с массой, меньшей, чем у Солнца. Для их светимости L_R и массы M_R справедливо соотношение $(L_R/L_0)\sim(M_R/M_0)^4$. Определим массу, при которой светимость L_R совпадет со светимостью белого карлика L_W:

$$\frac{M_R}{M_0} = \left(\frac{L_W}{L_0}\right)^{1/4} = \frac{T}{T_0}\sqrt{\frac{R}{R_0}} \approx 0.2.$$

Очевидно, что красные гиганты, попавшие в поле зрения, имеют большую массу, так как менее массивные звезды еще не могут сойти с главной последовательности. Итак, мы видим на снимке n_R=100 звезд с начальной массой от M_R до M_W и n_W=7 звезд, которые имели начальную массу больше M_W. Записав начальную функцию масс скопления в виде, данном в условии, имеем:

$$\frac{M_W^{-N}}{M_R^{-N} - M_W^{-N}} = \frac{n_W}{n_R} = 0.07.$$

В результате решения уравнения мы имеем:

$$N = -\frac{\ln(n_W / (n_R + n_W))}{\ln(M_W / M_R)} = 1.7.$$

Полученный показатель близок к показателю классической функции масс Салпитера (1.35). Разница обусловлена, прежде всего, тем, что в реальности белые карлики имеют разные температуры, некоторые, самые холодные, могли оказаться слабее порога чувствительности камеры.

Система оценивания (от одного члена жюри). При проверке решения необходимо уделять первостепенное внимание не на численные ответы, которые могут несколько отличаться вследствие оценочного характера решения, а на методологию его построения. Решение состоит из нескольких этапов, порядок которых может меняться. Первый этап состоит в вычислении светимости белого карлика, которое должно быть выполнено математически точно и оценивается в 1 балл. Второй этап заключается в подсчете соотношения количества белых карликов и других звезд в поле зрения, он также оценивается в 1 балл. Третий этап состоит в нахождении минимальной массы звезды главной последовательности, при которой она будет заметна на снимке. Этот этап оценивается в 4 балла. Если участник при этом выбирает другое соотношение «масса-светимость» для звезд главной последовательности (с показателем степени не менее 3), то оценка уменьшается на 1 балл, дальнейшее решение оценивается в полной мере. Определение минимальной начальной массы звезды, которая будет наблюдаться как белый карлик, также оценивается в 4 балла. При этом допускаются незначительные отклонения значения времени жизни Солнца до превращения в белый карлик (±1 млрд лет – без изменения оценки, (±2 млрд лет – уменьшение на 1 балл). Наконец, определение показателя степени *N* оценивается в 2 балла.

Если в качестве числа *N* участники приводят известную величину из функции Салпитера, не приводя при этом правильного решения, максимальная оценка за все решение не превышает 2 баллов.