

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников

по экономике

20 января 2018 года

Конкурс: 9 класс

Второй тур. Задачи. Решения.

Продолжительность работы — 140 минут.

Максимальное количество баллов за задачи — 120.

Каждая задача оценивается из 30 баллов.

Уважаемые коллеги!

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2018 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

При проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике и приведенных в данном документе, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2017/2018 учебном году» (раздел 3). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Для проверки второго тура члены жюри делятся на рабочие группы, каждая рабочая группа проверяет одну задачу, один из членов рабочей группы назначается ее руководителем. Такое разделение труда (при котором отдельные члены жюри проверяют конкретные задачи, а не работы целиком) способствует одинаковому уровню требований к корректности решений, облегчает разрешение спорных случаев. Состав рабочих групп утверждается председателем или заместителем председателя жюри. В случае если некоторые рабочие группы завершают проверку своих задач раньше других, их участники могут присоединиться к другим рабочим группам.
2. При наличии возможности желательно организовать проверку каждой задачи в каждой работе не менее чем двумя членами жюри.
3. Жюри проверяет работы в соответствии со схемами проверки, разработанными ЦПМК. В случае наличия в работе участника фрагмента решения, который не может быть оценен в соответствии со схемой проверки, жюри принимает решение исходя из своих представлений о справедливом оценивании, при возможности консультируясь с составителями заданий. Выполнение данного требования имеет исключительную важность, поскольку по итогам регионального этапа составляется единый рейтинг школьников по России, на основании которого определяется состав участников заключительного этапа.

4. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).
5. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена. Если невозможно однозначно определить, хотел ли участник, чтобы фрагмент решения был проверен, этот фрагмент не проверяется.
6. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
7. Все утверждения, содержащиеся в решении участника, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты, изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все не общеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником не общеизвестные факты, оценивается неполным баллом.
8. Участник может решать задачи любым корректным способом, жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах составителей). При этом недопустимо выставление баллов «за объем»: если участник написал большой текст, не содержащий продвижений в решении задачи, такой текст должен быть оценен в 0 баллов.
9. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
10. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как правило, приводит к существенному снижению оценки.
11. В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для доказательства его полноты и правильности, излагать необязательно.
12. Штрафы, которые жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от се-

ррезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила сути получаемых выводов, штрафуются меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.

13. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) к другим пунктам или на общую часть решения, выписанную в начале.
14. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.
15. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для получения полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение некоторых случаев может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобраных случаев в общем их числе).
16. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Схемы проверки некоторых задач написаны в форме классификации некорректностей (недочетов, ошибок, изъянов) в решениях участников. В этих задачах нужно руководствоваться соотношением баллов и наборов нарушений, приведенным в таблице ниже. В этих случаях удобно указывать в работе участника, какие именно пункты из схемы применялись при проверке (например, *H2*, *I1* и т. п.), чтобы снизить число вопросов на показе работ. Если в работах участников встречаются некорректности (или продвижения), не описанные в авторских схемах проверки, жюри должно самостоятельно определить их тяжесть (или ценность) и отнести к одному из типов в классификации. Хотелось бы предостеречь от чрезмерного пополнения перечня *минимальных продвижений* (для выставления «поощрительных баллов»), поскольку участники, не решившие ни одной задачи, но набравшие во всех задачах «поощрительные баллы», имеют меньше шансов на успешное выступление на последующих олимпиадах, чем те, кто решили немного задач, но полностью. В частности, не нужно

считать *минимальным продвижением* выписывание правильной формулы (без ее дальнейшего применения) «из учебника», чтобы не стимулировать участников в дальнейшем выписывать все известные им формулы вместо решения задачи.

Баллы	Описание
30	Полное верное решение без недочетов
25	Решение верное, но в нем есть недочеты (один или несколько)
20	Решение в целом верное, но в нем есть одна ошибка
15	Решение в целом верное, однако в нем есть одна ошибка и один или несколько недочетов
10	В решении имеется несколько ошибок или один изъян (наличие недочетов не имеет значения)
5	Решение участников в целом неверное (то есть в нем есть больше ошибок и изъянов, чем описано выше), однако в нем есть и минимальные продвижения (одно или несколько)
0	Решение участников неверное, минимальное продвижение отсутствует

Мы впервые применяем подобную систему классификации некорректностей, поэтому будем рады любым отзывам о ней (о том, удобно ли использовать ее при проверке, помогает ли она снизить число вопросов на показе работ и апелляций).

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики и подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения — в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из своего опыта и справедливости. В спорных случаях вы можете спросить совета у коллег из других регионов или у ЦПМК на странице <http://ILoveEconomics.ru/olimp/region/2018/grading>. Если ЦПМК посчитает нужным прояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов рекомендуется следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую: region@iloveeconomics.ru.

Ваша ЦПМК

Задача 1. «Лоббирование»**(30 баллов)**

Страна А, обладающая трудовыми ресурсами в размере 200 единиц, производит с их помощью два товара — Икс и Игрек, причем для производства единицы Икса необходимо две единицы труда, а для производства единицы Игрека — одна единица труда. На мировом рынке единица Игрека стоит так же, как единица Икса, в этой пропорции страна может обменивать любой товар на другой в любом количестве.

Однако пропорцию обмена можно изменить с помощью лоббирования. Наняв лоббистов, страна А сможет добиться удвоения мировой цены любого из товаров (выраженной в единицах другого товара). Стоимость услуг лоббистов равна 50 единицам Игрека независимо от товара, цену которого страна решит лоббировать.

Назовем *кривой торгово-лоббистских возможностей* (КТЛВ) множество точек, которое ограничивает сверху множество всех наборов (x, y) , доступных стране в результате производства, торговли и лоббирования. Постройте КТЛВ страны А и выведите аналитическое выражение для данной КТЛВ.

Решение. В отсутствие лоббирования страна А имеет сравнительное преимущество перед остальным миром в производстве Игреков. Внутренняя альтернативная стоимость 1 игрека равна 0,5 Икса, а на мировом рынке игрек стоит, как один икс: $p_x : p_y = 1 : 1$. Получается, что страна произведет 200 (максимальное количество) единиц Игрека и, возможно, часть из них будет продавать, получая за каждый игрек 1 Икс взамен. Получается, что страна может добиться любого количества Икса и Игрека, сумма которых равна 200: $X + Y = 200$. Эту линию иногда называют *кривой торговых возможностей* (КТВ).

Стране не может быть выгодно лоббировать повышение цены Икса, так как в этом случае она добьется пропорции обмена, равной альтернативным издержками производства внутри страны. А значит, выгод от торговли не будет, а товар Игрек на лоббирование будет потрачен.

Если страна решит лоббировать повышение цены Игрека, то она, конечно, продолжит его экспортировать (экспорт станет еще выгоднее, чем раньше), но потратит на эту операцию 50 единиц Игрека. Получается, что для торговли останется только 150 единиц Игрека, но зато за единицу Игрека можно будет получить 2 единицы Икса. Получаем уравнение КТВ после лоббирования: $X/2 + Y = 150$.

Примечание. Такого объяснения получения данного уравнения достаточно, однако возможен и более формальный подход. Предположим, страна будет экспортировать z единиц Игрека. Тогда она получит взамен $2z$ единиц Икса. Получается, что для потребления доступно $Y = 150 - z$ и $X = 2z$. Выражая z из любого из этих условий и подставляя в другое, получаем $X/2 + Y = 150$.

В каких случаях страна будет применять лоббирование, а в каких не будет? Ответ зависит от того, какая из линий КТВ (без лоббирования или с ним) лежит *выше*. В первой КТВ $Y = 200 - X$, во второй $Y = 150 - X/2$. Составим неравенство:

$$\begin{aligned} 200 - X &\geq 150 - X/2, \\ X &\leq 100. \end{aligned}$$

Получаем уравнение КТЛВ:

$$Y = \begin{cases} 200 - X, & 0 \leq X \leq 100; \\ 150 - X/2, & 100 < X \leq 300. \end{cases} \quad (1.1)$$

Альтернативный способ — составить неравенство, сравнивающее X (так мы узнаем, какая КТВ лежит *правее*):

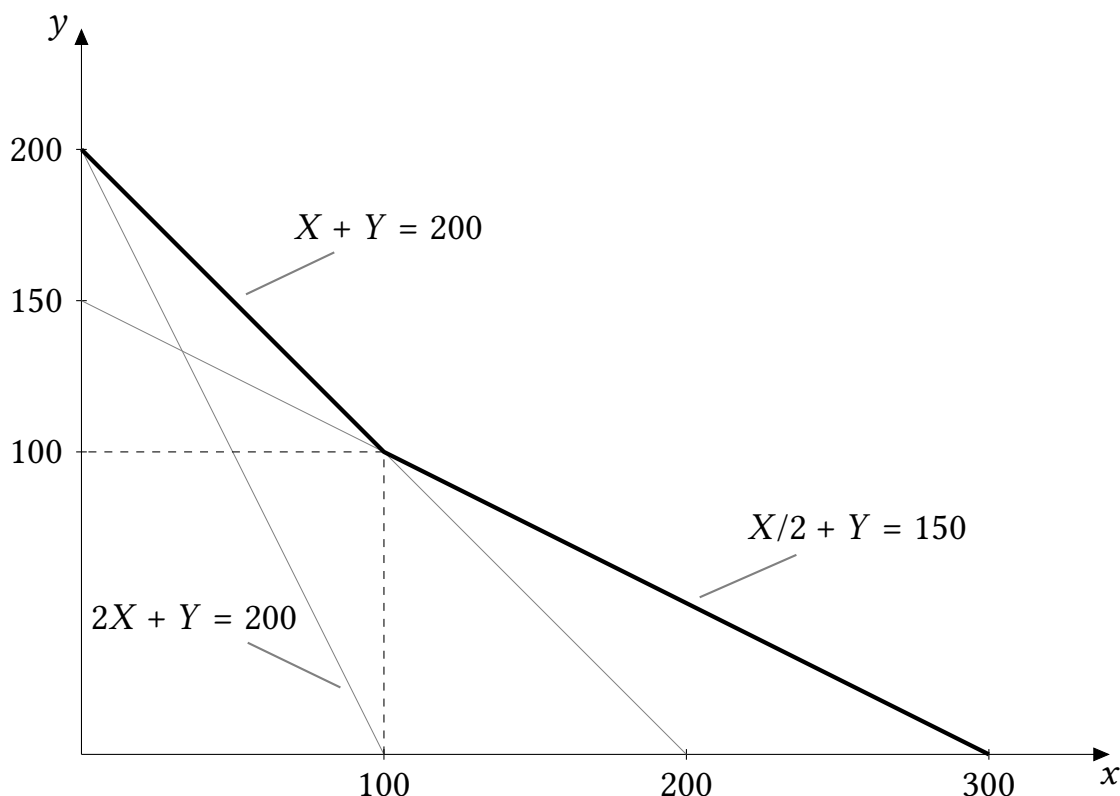
$$\begin{aligned} 200 - Y &\geq 300 - 2Y, \\ Y &\geq 100. \end{aligned}$$

Получаем уравнение КТЛВ:

$$X = \begin{cases} 200 - Y, & 100 \leq Y \leq 200; \\ 300 - 2Y, & 0 \leq Y < 100. \end{cases} \quad (1.2)$$

Выражение (1.2) эквивалентно выражению (1.1), найденному ранее.

Графически ситуация сводится к следующему:



На этом рисунке изображены и подписаны исходная КПВ (не требуется для правильного ответа), КТВ без лоббирования, КТВ с лоббированием. КТЛВ — более толстая линия, состоящая из участков двух КТВ.

Примечание. В обоих вариантах записи уравнения КТЛВ точка (100, 100) может быть отнесена как к верхнему интервалу, так и к нижнему, поскольку КТЛВ является непрерывной функцией. Кроме того, указание нижних и верхних границ ($X \geq 0$, $Y \geq 0$, $X \leq 300$, $Y \leq 200$) необязательно для корректной записи. Иными словами, следующие варианты, а также аналогичные, также корректны:

$$Y = \begin{cases} 200 - X, & X < 100; \\ 150 - X/2, & X \geq 100. \end{cases} \quad X = \begin{cases} 200 - Y, & Y > 100; \\ 300 - 2Y, & Y \leq 100. \end{cases}$$

Примечание составителей

В авторском решении задачи 1 предполагается, что лоббирование можно использовать не более одного раза, причем только до обмена (или одновременно с ним). Это соответствует условию: в задаче написано, что с помощью лоббирования можно изменить пропорцию обмена, наличие нескольких разных пропорций не предусматривается. Такой подход к построению производственных и потребительских множеств традиционен для школьных олимпиад и для микроэкономики вообще: концепция КПВ предполагает только статическую модель, то есть в ней обычно не предполагается возможности итеративных процедур.

Тем не менее, по мнению членов жюри из некоторых регионов, понимание задачи, в котором допускается использование более сложных механизмов (многократное лоббирование, лоббирование после покупки только части товара и т. п.), также является корректным и не упрощает задачу. В соответствии с решением ЦПМК по экономике, в тех регионах, где условие задачи не пояснялось для всех участников, жюри должно засчитывать как верное решение любой вариант, который прямо не запрещен условием — в случае корректных расчетов и рассуждений.

Схема проверки. Схема проверки этой задачи написана в форме классификации некорректностей (недочетов, ошибок, изъянов) в решениях участников. При выставлении оценки нужно руководствоваться соотношением баллов и наборов нарушений, приведенным в таблице ниже. Если в работах участников встречаются некорректности (или продвижения), не описанные в авторских схемах проверки, жюри должно самостоятельно определить их тяжесть (или ценность) и отнести к одному из типов в классификации.

Недочеты:

- Н1.** Участник допустил ошибку в преобразованиях выражений или расчетах, не упростившую решение и не повлиявшую на ответ существенным образом.
- Н2.** Участник не объяснил, что стране не может быть выгодно лоббировать повышение цены X (и экспортировать его).

Ошибки:

О1. Участник допустил ошибку в преобразованиях выражений или расчетах, приведшую к существенному упрощению дальнейшего решения, появлению не соответствующих экономической логике результатов (например, возрастающих КТЛВ) или качественному искажению результата (например, получилось, что лоббирование не нужно применять никогда).

Изъяны:

И1. Участник неправильно определил направление экспорта (посчитал, что страна должна производить и экспортировать Икс).

И2. Участник содержательно неправильно искал КТЛВ, то есть у него это не верхняя граница объединения доступных множеств. В частности, это может быть выражено в том, что на КТЛВ есть только один участок (без лоббирования или с лоббированием).

Минимальные продвижения:

П1. Участник аналитически или графически построил КПВ ($2X + Y = 200$).

П2. Участник объяснил, почему страна будет экспортировать Игрек (до и/или после лоббирования).

Баллы	Описание
30	Полное верное решение без недочетов
25	Решение верное, но в нем есть недочеты (один или несколько)
20	Решение в целом верное, но в нем есть одна ошибка
15	Решение в целом верное, однако в нем есть одна ошибка и один или несколько недочетов
10	В решении имеется несколько ошибок или один изъян (наличие недочетов не имеет значения)
5	Решение участников в целом неверное (то есть в нем есть больше ошибок и изъянов, чем описано выше), однако в нем есть и минимальные продвижения (одно или несколько)
0	Решение участников неверное, минимальное продвижение отсутствует

Задача 2. «Борьба с пробками»**(30 баллов)**

Люди численностью 50 человек живут в пригороде и ездят работать в город М. На работу можно ездить на метро или на автомобиле. Поездка на метро всегда занимает 50 минут, а продолжительность поездки на автомобиле зависит от загруженности дороги и занимает $11 + 2N$ минут, где N — общее количество людей, которые едут на работу на автомобиле. Решая, как ехать на работу, люди принимают во внимание только время в пути, в равновесии никто из них не может доехать на работу быстрее, выбрав другой вид транспорта.

Мэр города М. озабочен проблемой пробок и хочет их уменьшить. Советники предлагают ему несколько мер, перечисленных ниже. От вас требуется прокомментировать каждую меру с точки зрения ее последствий для пробок: нужно ответить, чему в результате ее введения будет равно общее время, которое жители пригорода проводят в автомобилях в пути на работу (от этого зависят вредные выбросы в атмосферу, необходимость содержать дорожную полицию и т. д.). Каждую меру нужно комментировать в отдельности: например, если вводится мера из пункта в), то все остальные не вводятся.

а) (6 баллов) В этом пункте найдите равновесие для ситуации, описанной в задаче, то есть если никакие меры сокращения пробок не применяются. Ответьте на вопросы, заданные в условии.

б) (6 баллов) Если построить новую развязку, время поездки на работу на машине составит $9 + 2N$ минут.

в) (6 баллов) Если закупить дополнительные поезда для метро, время поездки на нем сократится до 40 минут.

г) (6 баллов) Ограничение парковки в городе увеличит время в пути каждого автомобилиста на 10 минут — их нужно будет потратить на поиск парковочного места.

д) (6 баллов) Запрет на автомобили с двигателями внутреннего сгорания позволит ездить в город на машине только 10 владельцам электромобилей (остальные 40 человек будут вынуждены ехать на метро).

Решение.

а) Чтобы человек, который едет на машине, не захотел сменить вид транспорта, время в пути на машине не должно быть больше, чем время на метро:

$$11 + 2N \leq 50.$$

С другой стороны, для пассажира метро время в случае перехода на автомобиль (тогда автомобилистов станет $N + 1$) также не должно уменьшиться:

$$50 \leq 11 + 2(N + 1).$$

Первое неравенство верно при $N \leq 19,5$, второе — при $N \geq 18,5$. Значит, на автомобилях поедут 19 человек. Время в пути на автомобиле составит $11 + 2 \cdot 19 = 49$ минут. Всего же люди проведут в автомобилях $49 \cdot 19 = 931$ минуту.

б) Рассуждая аналогично предыдущему пункту, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 9 + 2N \leq 50, \\ 50 \leq 9 + 2(N + 1). \end{cases} \quad \begin{cases} N \leq 20,5, \\ N \geq 19,5. \end{cases}$$

Значит, на автомобилях поедет 20 человек, каждый из них потратит на дорогу $9 + 2 \cdot 20 = 49$ минут (столько же, сколько до постройки развязки), а общее время в пути на автомобилях составит $49 \cdot 20 = 980$ минут — больше, чем до постройки развязки! Дело в том, что увеличение пропускной способности дороги стимулировало больше людей по ней поехать, из-за чего время в пути осталось примерно равно времени в пути на метро (которое не изменилось).

в) Рассуждая аналогично предыдущему пункту, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 11 + 2N \leq 40, \\ 40 \leq 11 + 2(N + 1). \end{cases} \quad \begin{cases} N \leq 14,5, \\ N \geq 13,5. \end{cases}$$

Получается, что количество людей в пробке уменьшилось до 14 человек, путешествие каждого из них занимает $11 + 2 \cdot 14 = 39$ минут, а общее время в пути на автомобилях составит $39 \cdot 14 = 546$ минут. Ускорение метро действительно помогает снизить пробки.

г) Рассуждая аналогично предыдущему пункту, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 11 + 2N + 10 \leq 50, \\ 50 \leq 11 + 2(N + 1) + 10. \end{cases} \quad \begin{cases} N \leq 14,5, \\ N \geq 13,5. \end{cases}$$

Количество автомобилистов совпадает с предыдущим пунктом и равно 14 — по этому показателю усложнение парковки эквивалентно ускорению метро.

Путешествие каждого автомобилиста занимает $11 + 2 \cdot 14 + 10 = 49$ минут, а общее время в пути на автомобилях составит $49 \cdot 14 = 686$ минут. Затруднение парковки помогает снизить пробки — несмотря на то, что автомобилисты вынуждены проводить дополнительное время в машинах, ища парковочные места.

д) Даже если все 10 владельцев электромобилей поедут на них на работу, их время в пути составит $11 + 2 \cdot 10 = 31$ минут — меньше, чем на метро. Значит, все они выберут этот вариант, а остальные 40 человек поедут на метро (у них нет возможности ехать на машине). Общее время в пути на автомобилях составит $31 \cdot 10 = 310$ минут. Запрет многим жителям пригорода передвигаться на автомобилях, конечно, сокращает пробки.

Альтернативное решение. Ответы пунктов а)–г) можно было получить другим способом.

В при условии, что каждым видом транспорта хотя бы кто-то пользуется, время в пути обоими способами должно быть примерно одинаковым. Если оно будет существенно отличаться, люди перейдут на более быстрый вид. (В пункте д) эта логика не работает, так как выбор между видами транспорта есть не у всех.) Посмотрим, что будет, если приравнять время в пути в каждом из пунктов.

а) $11 + 2N = 50, N = 19,5.$

б) $9 + 2N = 50, N = 20,5.$

в) $11 + 2N = 40, N = 14,5.$

г) $11 + 2N + 10 = 50, N = 14,5.$

Ответы получились дробными. Что будет, если мы округлим их в бóльшую сторону, то есть отправим «колеблющегося» человека на автомобиле? Тогда в каждом из случаев время в пути на автомобиле увеличится, а время в пути на метро останется прежним, то есть типичному автомобилисту станет выгодно пересесть на метро. С другой стороны, если мы округлим N вниз (то есть отправим «колеблющегося» человека на метро), то время на автомобиле станет чуть больше времени на метро, но переключение невыгодно, поскольку развернет неравенство. Это в каждом случае и будет равновесием.

Схема проверки. Решение каждого пункта оценивается в 6 баллов, из которых 1 балл нужно снять в случае арифметической ошибки, не сильно исказившей результат.

Если участник проводит решение вторым способом, но неправильно решает вопрос с округлением (оставляет ответ дробным, округляет в неправильную сторону или в правильную, но не объясняет, почему), то пункт оценивается в 3 балла. Если участник при решении этим способом допустил арифметическую ошибку, в результате которой ответ сразу получился целым и решение вопроса с округлением не потребовалось, то за пункт ставится 2 балла.

Задача 3. «Прибыль — это не всё» (30 баллов)

Часто считается, что фирмы должны не просто максимизировать прибыль, а учитывать интересы общества: ограничивать негативное влияние на окружающую среду, не нарушать этических стандартов при ведении бизнеса, предоставлять рабочие места представителям социально незащищенных слоев населения.

Рассмотрим фирму ABC, которая максимизирует не прибыль, а сумму прибыли и величины, зависящей от уровня безработицы в стране:

$$B = \pi + 16(100 - u),$$

где π — прибыль, а u — уровень безработицы в процентах.

Всего в стране проживают 100 человек, 70 из которых стабильно заняты на других производствах и не собираются устраиваться на фирму ABC. 30 человек являются безработными, и фирма ABC наймет сотрудников именно из их числа. (Больше никакие работодатели не предлагают им работу.)

Спрос на продукцию фирмы ABC задается уравнением $Q = 120 - P$. Фирма производит товар, используя только труд, при этом $Q = 2L$. Если фирма наймет L работников, нужно будет платить каждому из них зарплату $w = 4L$.

На сколько процентных пунктов в этой ситуации уровень безработицы будет меньше по сравнению с тем, который был бы при максимизации фирмой ABC прибыли?

Решение. Запишем целевую функцию фирмы с учетом того, что $\pi = TR - TC$, $TR = PQ$, $TC = wL$, $P = 120 - Q$, $w = 4L$, $Q = 2L$, $u = (30 - L)/100 \cdot 100\%$:

$$B = (120 - 2L) \cdot 2L - 4L \cdot L + 16(100 - (30 - L)).$$

После упрощения получаем $B = -8L^2 + 256L + 1120$. Это квадратичная парабола с ветвями вниз, вершина которой находится в точке $L^* = 16$. Тот же ответ можно получить, взяв производную функции ($B' = -16L + 256$) и приравняв ее к 0. В этом случае можно заметить, что производная в критической точке меняет знак с + на - (варианты: первая производная убывает, вторая производная равна -16, то есть отрицательна), так что это точка максимума.

Примечание. В этой задаче не будут работать стандартные формулы для ценообразования монополии ($MR = MC$, $MRP_L = MC_L$, связь индекса Лернера и эластичности спроса и т. п.), так как целевая функция фирмы — не прибыль.

Уровень безработицы составит

$$u^* = (100 - 70 - 16)/100 \cdot 100\% = 14\%.$$

Прибыль фирмы равна $\pi = (120 - 2L) \cdot 2L - 4L \cdot L$. Это квадратичная парабола с ветвями вниз, вершина которой находится в точке $L^* = 15$. Тот же ответ можно получить, взяв производную функции ($\pi' = -16L + 240$) и приравняв ее к 0. В этом случае можно заметить, что производная в критической точке меняет знак с + на - (варианты: первая

производная убывает, вторая производная равна -16 , то есть отрицательна), так что это точка максимума.

Уровень безработицы в этом случае составил бы

$$u^{**} = (100 - 70 - 15)/100 \cdot 100 \% = 15 \%,$$

то есть на 1 процентный пункт больше.

Альтернативное решение. Выше представлена максимизация по переменной L , поскольку ее непосредственно просят найти в задаче. С не меньшим успехом можно было бы выразить функцию прибыли через w , Q или P (во всех случаях она оказалась бы квадратичной параболой с ветвями вниз), максимизировать, а затем перейти к L . В случае корректного решения должно получаться:

Выражение для B	Выражение для π	$\max B$	$\max \pi$
$-w^2/2 + 64w + 1120$	$-w^2/2 + 60w$	$w^* = 64$	$w^{**} = 60$
$-2Q^2 + 128Q + 1120$	$120Q - 2Q^2$	$Q^* = 32$	$Q^{**} = 30$
$-2P^2 + 352P - 12320$	$-2P^2 + 360P - 14400$	$P^* = 88$	$P^{**} = 90$

Схема проверки. Схема проверки этой задачи написана в форме классификации некорректностей (недочетов, ошибок, изъянов) в решениях участников. При выставлении оценки нужно руководствоваться соотношением баллов и наборов нарушений, приведенным в таблице ниже. Если в работах участников встречаются некорректности (или продвижения), не описанные в авторских схемах проверки, жюри должно самостоятельно определить их тяжесть (или ценность) и отнести к одному из типов в классификации.

Недочеты:

- Н1.** Участник допустил ошибку в преобразованиях выражений, расчетах или дифференцировании, не упростившую решение и не повлиявшую на ответ существенным образом: в частности, в ответе получилось $L^* > L^{**}$, как и должно быть.
- Н2.** Участник не проверил достаточные условия максимума (например, нашел вершину параболы, но не проверил, что она имеет ветви вниз) хотя бы один раз.

Ошибки:

- О1.** Участник использовал неверную формулу для расчета уровня безработицы.
- О2.** Участник не провел расчетов L^{**} , то есть не выяснил, сколько работников наняла бы фирма, если бы она максимизировала прибыль.
- О3.** Участник допустил ошибку в преобразованиях выражений, расчетах или дифференцировании, приведшую к существенному упрощению дальнейшего решения, появлению не соответствующих экономической логике результатов или качественному искажению результата (например, получилось, что фирма должна закрыться).

Изъяны:

И1. Участник не провел расчетов L^* , то есть не выяснил, сколько работников наймет фирма с заданной целевой функцией.

Минимальные продвижения:

П1. Участник выписал целевую функцию B , преобразовав ее так, чтобы она зависела от одной переменной.

Баллы	Описание
30	Полное верное решение без недочетов
25	Решение верное, но в нем есть недочеты (один или несколько)
20	Решение в целом верное, но в нем есть одна ошибка
15	Решение в целом верное, однако в нем есть одна ошибка и один или несколько недочетов
10	В решении имеется несколько ошибок или один изъян (наличие недочетов не имеет значения)
5	Решение участников в целом неверное (то есть в нем есть больше ошибок и изъянов, чем описано выше), однако в нем есть и минимальные продвижения (одно или несколько)
0	Решение участников неверное, минимальное продвижение отсутствует

Задача 4. «Географическое разнообразие» (30 баллов)

В стране А есть столица и очень много маленьких городов. Автобусная компания «Солнышко» является единственным перевозчиком между столицей и маленькими городами. Компания сама выбирает цены билетов, а также то, в какие города будут ходить автобусы из столицы (между маленькими городами дорог нет), при этом количество городов может быть только целым. Спрос на перевозки в каждый город одинаков и имеет следующий вид: $q_i = 400/p_i^2$, где q_i — величина спроса на билеты на автобус в i -й город (в штуках), p_i — цена билета в этот город ($i = 1, 2, \dots, N$, где N — общее количество городов, в которые ходят автобусы компании «Солнышко»).

Издержки перевозки одного пассажира в любой город составляют 2 денежных единицы, не считая издержек организации маршрута. Создание всё новых маршрутов — не такая уж и простая задача, требующая составления расписания, организации логистики, закупок, установки турникетов и т. п. Организация маршрута в первый город стоит 1 денежную единицу, во второй — 2 денежные единицы, ..., в N -й город — N денежных единиц.

Определите максимальную прибыль фирмы «Солнышко».

Решение. Общую прибыль можно записать так:

$$\pi = (p_1 q_1 - 2q_1) + (p_2 q_2 - 2q_2) + \dots + (p_N q_N - 2q_N) - (1 + 2 + \dots + N).$$

После подстановки обратных функций спроса $p_i = 20/\sqrt{q_i}$ и применения формулы суммы арифметической прогрессии получаем:

$$\pi = (20\sqrt{q_1} - 2q_1) + (20\sqrt{q_2} - 2q_2) + \dots + (20\sqrt{q_N} - 2q_N) - \frac{N^2 + N}{2}.$$

Выражение в каждой из скобок — парабола относительно $\sqrt{q_i}$ (каждое $\sqrt{q_i}$ влияет на значение только «своей» параболы). Если $\sqrt{q_i} = t$, то выражения в скобках принимают вид $(20t - 2t^2)$. Все параболы имеют вершину в точке $t = 5$, то есть $q_i = 25$.

Тот же ответ можно получить, взяв производную функции прибыли от перевозок до отдельного города:

$$\pi_i' = (20\sqrt{q_i} - 2q_i)' = \frac{10}{\sqrt{q_i}} - 2.$$

Это убывающая функция, а значит, приравнивание ее к 0 даст максимум выражения под знаком производной: $q_i = 25$.

Еще один способ — посчитать прибыль в регионе i как функцию от цены:

$$\pi_i = p_i \cdot \frac{400}{p_i^2} - 2 \cdot \frac{400}{p_i^2}.$$

Это парабола с ветвями вниз относительно $s = 1/p_i$, максимум достигается при $p_i = 4$.

Наконец, можно было узнать оптимальную цену, воспользовавшись формулой взаимосвязи индекса Лернера и эластичности спроса (третий способ):

$$\frac{p_i - MC}{p_i} = \frac{1}{|\epsilon|}.$$

При данных функциях спроса $|\varepsilon| = 2$, а $MC = 2$ по условию. Отсюда получаем $p_i = 4$.

Этот результат никак не зависит от того, каково значение N : сколько бы городов ни обслуживала компания, в каждый будет продано 25 билетов, цена каждого билета равна 4.

Запишем функцию прибыли с учетом выбора оптимальных q_i :

$$\pi = (20 \cdot 5 - 2 \cdot 25) \cdot N - \frac{N^2 + N}{2} = \frac{99N - N^2}{2}. \quad (4.1)$$

Это тоже парабола с ветвями вниз — теперь уже зависящая от переменной N . Ее максимум достигается в вершине — точке $N = 49,5$, но количество городов должно быть целым. Поскольку квадратичная парабола симметрична относительно своей вершины, а числа 49 и 50 находятся на одинаковом расстоянии от 49,5, в двух ближайших целочисленных точках прибыль будет одинаковой и равной

$$\pi = \frac{99 \cdot 50 - 50^2}{2} = 1225.$$

Альтернативное решение. С помощью рассуждений из предыдущего пункта можно рассчитать максимальную прибыль (не считая издержек открытия маршрута). Она равна 50, то есть открытие каждого нового маршрута приносит компании дополнительно 50 денежных единиц. Так как каждый маршрут стоит дороже предыдущего, запускать маршруты нужно до тех пор, пока издержки на запуск меньше или равны дополнительной выгоде (после этого запуск нового маршрута будет уменьшать прибыль). Таким образом, оптимально будет открыть 49 или 50 маршрутов, а максимальная прибыль составит $50 \cdot 49 - (1 + 2 + \dots + 49) = 50 \cdot 50 - (1 + 2 + \dots + 50) = 1225$.

Схема проверки. Схема проверки этой задачи написана в форме классификации некорректностей (недочетов, ошибок, изъянов) в решениях участников. При выставлении оценки нужно руководствоваться соотношением баллов и наборов нарушений, приведенным в таблице ниже. Если в работах участников встречаются некорректности, не описанные в авторских схемах проверки, жюри должно самостоятельно определить их тяжесть (и отнести к одному из типов в классификации).

Недочеты:

- Н1.** Участник допустил ошибку в преобразованиях выражений, расчетах или дифференцировании, не упростившую решение и не повлиявшую на ответ существенным образом.
- Н2.** Участник определил, какое N максимизирует прибыль (с учетом максимизации прибыли от каждого города), но не учел целочисленность, то есть оставил ответ дробным.
- Н3.** Участник не проверил достаточные условия максимума (например, нашел вершину параболы, но не проверил, что она имеет ветви вниз) хотя бы один раз.
- Н4.** Участник не посчитал численное значение максимальной прибыли, требуемое в вопросе задачи.

Ошибки:

- О1.** Участник использовал неверную формулу для расчета суммы арифметической прогрессии.
- О2.** Участник допустил ошибку в преобразованиях выражений, расчетах или дифференцировании, приведшую к существенному упрощению дальнейшего решения, появлению не соответствующих экономической логике результатов (например, возрастающих функций спроса) или качественному искажению результата (например, получилось, что фирма должна закрыться).

Изъяны:

- И1.** Участник не стал искать оптимальное N , то есть пытался максимизировать суммарную прибыль, но посчитал, что ответ можно оставить в виде зависимости от N , как в выражении (4.1).

Минимальные продвижения:

- П1.** Участник максимизировал прибыль от одного из городов (получил ответ $q_i = 25$).

Баллы	Описание
30	Полное верное решение без недочетов
25	Решение верное, но в нем есть недочеты (один или несколько)
20	Решение в целом верное, но в нем есть одна ошибка
15	Решение в целом верное, однако в нем есть одна ошибка и один или несколько недочетов
10	В решении имеется несколько ошибок или один изъян (наличие недочетов не имеет значения)
5	Решение участников в целом неверное (то есть в нем есть больше ошибок и изъянов, чем описано выше), однако в нем есть и минимальные продвижения (одно или несколько)
0	Решение участников неверное, минимальное продвижение отсутствует