# IX/X.3 ВНУТРИ ГАЛАКТИКИ

*О.С. Угольников*

**3. Условие.** Эллиптическая галактика типа E0 (шарообразная форма) на 20% по массе состоит из звезд солнечного типа и на 80% - из темной материи. Плотность обеих составляющих постоянна на всем объеме галактики. Некоторая звезда движется по замкнутой траектории внутри галактики, не вылетая за ее пределы, с периодом 100 миллионов лет. Сколько всего звезд было бы видно невооруженным глазом в небе обитаемой планеты, обращающейся вокруг этой звезды? Тесные сближения с другими звездами не учитывать.

**3. Решение.** Как известно, для сферического однородного массивного тела выполняется свойство: на материальную точку, расположенную внутри нее, действует притяжение всех частей тела, расположенных ближе к центру, нежели эта точка, а действие внешних слоев компенсируется. Таким образом, на тело, расположенное на расстоянии $r$ от центра, будет действовать ускорение тяготения:

$$g = -\frac{4\pi G \rho r}{3}.$$

Знак "–" означает, что ускорение направлено к центру, противоположно радиусу-вектору **r**. Мы получили уравнение, похожее на уравнение пружинного маятника, возвращающая сила которого противоположна по знаку и пропорциональна по величине смещению груза маятника относительно равновесного положения: $a = -\omega^2 r$, здесь $\omega$ – частота колебаний маятника. В таком поле тяжести звезда будет совершать движение с постоянным периодом, не зависящим от начального положения. Колебания могут происходить и в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, и тогда звезда будет описывать эллипс, но центр галактики будет уже не в фокусе, а в центре этого эллипса. Период колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}.$$

Отсюда мы получаем соотношение для полной плотности галактики:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} = 1.4\cdot 10^{-20}\ \text{кг/м}^3.$$

Учтем далее, что на звезды приходится лишь доля $\eta$ (0.2) от этой плотности и найдем концентрацию звезд солнечного типа в этой галактике $n$:

$$\rho\cdot\eta = n\cdot M;\quad n = \frac{\rho\cdot\eta}{M} = \frac{3\pi\eta}{GMT^2} = 1.4\cdot 10^{-51}\ \text{м}^{-3} = 0.041\ \text{пк}^{-3}.$$

Здесь $M$ - масса Солнца. Определим, с какого расстояния $r_0$ Солнце, имеющее абсолютную звездную величину $m_0$ (+4.7) будет выглядеть как звезда с $m$=+6:

$$\lg r_0 = \frac{m - m_0}{5} + 1;\quad r_0 = 18.2\ \text{пк}.$$

Искомое число звезд есть их число внутри сферы с найденным радиусом:

$$N = \frac{4\pi n r_0^3}{3} \approx 1000.$$

**3. Система оценивания.**

**Этап 1 - 3 балла. Установление связи между периодом вращения звезды и плотностью галактики, определение плотности.**
Участники могут идти путем, описанным выше, и в этом случае этап при условии правильного выполнения оценивается полностью (3 балла). Они могут предположить, что орбита звезды круговая и произвести расчет по стандартным формулам небесной механики, учитывая только внутреннюю часть галактики. Тогда за этап выставляется 2 балла, но последующие этапы оцениваются в полной мере.

**Этап 2 - 2 балла. Определение концентрации звезд в галактике.**
Требуемая точность 10%.
Вероятная ошибка при решении: участник забывает о темной материи, завышая концентрацию звезд в 5 раз. В этом случае не засчитывается данный этап, а также финальный этап (запись ответа).

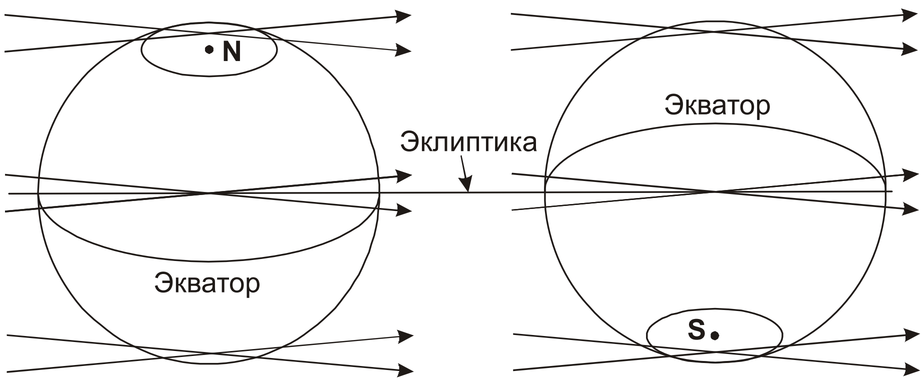
**Этап 3 - 2 балла. Нахождение максимального расстояния до звезды, видимой невооруженным глазом.**
В качестве предельной звездной величины для невооруженного глаза могут браться значения от $5.5^m$ до $6.5^m$, что не является ошибкой. В остальных расчетах точность должна быть не хуже 10%.

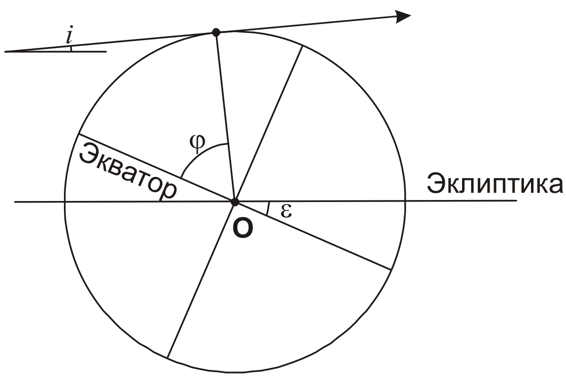
**Этап 4 - 1 балл. Определение числа звезд, видимых в небе планеты.**
Засчитывается в случае правильных выполнений предыдущих этапов. Отличие ответа от приведенного выше может быть вызвано только другим заданием предельной звездной величины на этапе 3, во всех остальных случаях при отклонениях ответа более, чем на 20%, этап не засчитывается. Участники могут найти число звезд, видимых в один момент с одной точки поверхности планеты и получить число около 500, что также засчитывается при условии соответствующего описания найденной величины.

**Вероятная ошибка при решении:** попытка учета межзвездного поглощения света в галактике, которое при описанном условии отсутствует. Оценка определяется точностью выполнения всех этапов и далее уменьшается на 2 балла.

**4. Условие.** В каких широтах лунная тень во время солнечного затмения может двигаться по поверхности Земли точно с запада на восток, и в каких – точно с востока на запад? Атмосферной рефракцией и рельефом Земли пренебречь.

**4. Решение.** Луна движется по орбите вокруг Земли против часовой стрелки (если смотреть с северной стороны) и при полном солнечном затмении ее тень движется по поверхности Земли обычно от утреннего полушария к вечернему. На рисунке показаны примеры движения тени Луны во время летнего и зимнего солнцестояния. Направление движения тени наклонено к плоскости эклиптики на малый угол (около 5°). В зависимости от сезона, когда наблюдается затмение, для любой широты от северного до южного полюса тень Луны в какой–то точке Земли может двигаться точно вдоль параллели, с запада на восток.

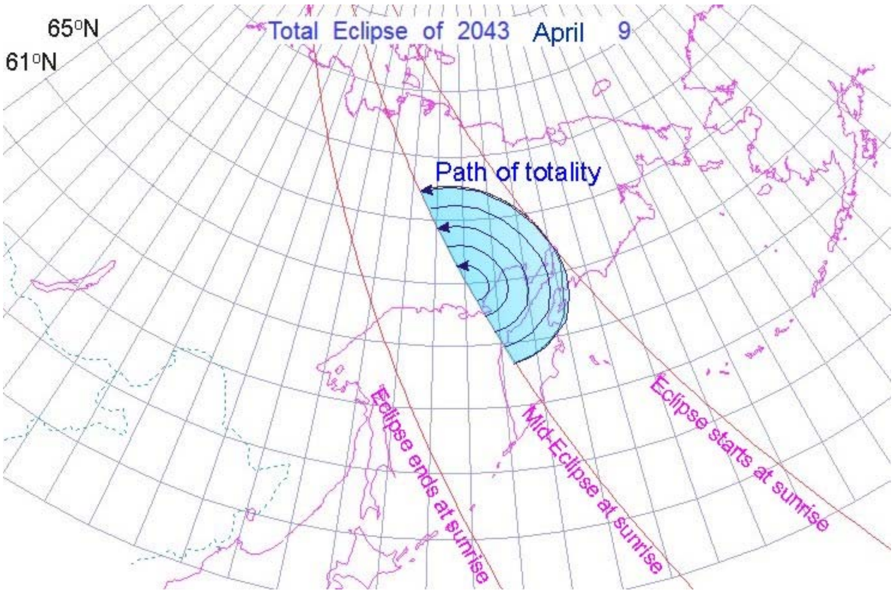



На этих же рисунках мы можем видеть, что вблизи летнего солнцестояния, если затмение наблюдается вблизи светлой полуночи в полярной области Земли на широтах более +66.6° (Северный полярный круг), тень может двигаться и с востока на запад. Соответственно, за Южным полярным кругом (широты от –66.6° до –90°) такая ситуация может случиться вблизи дня зимнего солнцестояния. Однако, широты в ±66.6° не будут предельными. Для нахождения граничной широты рассмотрим иной случай. Пусть затмение происходит вблизи весеннего равноденствия, а Луна располагается у восходящего узла своей орбиты. Предположим также, что лунная тень лишь слегка задела Землю с северной стороны. По рисунку мы можем определить, на какой широте произошло касание:

$$\varphi = 90° - \varepsilon - i = 61.4°.$$

Здесь ε – угол наклона экватора к эклиптике, $i$ – наклон орбиты Луны к эклиптике. При затмении, близком к касательному, тень опишет на поверхности Земли дугу, по форме близкую к полукругу. В какой-то момент, ближе к окончанию затмения, она будет двигаться в западном направлении. Похожая ситуация сложится во время полного солнечного затмения 9 апреля 2043 года, которое будет наблюдаться на восходе Солнца на севере Камчатского полуострова. Область видимости полной фазы показана на рисунке. Такая же картина может наблюдаться в южном полушарии на широтах ниже –61.4° на заходе Солнца вблизи весеннего равноденствия или на его восходе вблизи осеннего равноденствия.




**4. Система оценивания.**

**Этап 1 - 3 балла. Интервал широт, где тень может двигаться с запада на восток.**
Оценивается 3 баллами только в случае правильного ответа (все широты). При указании половины интервала (от экватора до полюса) оценка составляет 1 балл, при указании интервала между полярными кругами - также 1 балл, в остальных случаях оценка за этап - 0 баллов. Формально говоря, участник олимпиады может не включать в ответ сами полюса, так как там понятия запада и востока не определены, это не влияет на оценку.

**Этап 2 - 5 баллов. Интервал широт, где тень может двигаться с востока на запад.**
При указании интервала широт от полярного круга до полюса (наиболее вероятная ошибка) оценка составляет 1 балл при указании одного полушария и 2 балла - при указании двух полушарий. При указании правильных границ оценка составляет 3 балла при указании одного полушария и 5 баллов - при указании двух полушарий. В последнем случае должно быть указано, при каких обстоятельствах может произойти такое затмение - вблизи равноденствий, тень Луны касается поверхности Земли. Оценка не меняется, если границы интервала изменены на 0.25° для учета видимых размеров Солнца.

**Вероятная ошибка при правильном ответе:** участник рассматривает случай, соответствующий солнцестояниям (верхние рисунки), но при этом указывает, что склонение Луны может достигать ε+i=28.6°, и поэтому минимальная широта по модулю равна 61.4°. Хотя данный ответ численно совпадает с правильным, но он получен из неверных соображений, так как при таких склонениях Луны затмения наступить не могут. Оценка за второй этап не превосходит 2 баллов (1 балла при указании одного полушария). Это правило действует, даже если участник олимпиады не указывает такое значение склонения Луны, но оно вытекает из его рассуждений, либо если правильный ответ дается без обоснований.

# IX.5 КАРМАННЫЙ ПЛАНЕТАРИЙ

*С.Г. Желтоухов*

**5. Условие.** Один астроном решил сделать себе свой собственный планетарий, просверлив отверстия нужного размера в глобусе радиусом 20 см, в центр которого он установил точечный источник света. Оцените размер отверстия в глобусе, при котором размер проецируемой звезды перестанет сокращаться с уменьшением диаметра отверстия. Пусть такой диаметр соответствует самым слабым звездам, видимым невооруженным глазом. Считая, что относительная яркость звезд должна сохраняться, определите размер отверстия для самой яркой звезды ночного неба, Сириуса, имеющего звездную величину $-1.5^m$, и угловой размер его изображения. Звезды какой звездной величины сидящий рядом с планетарием астроном увидит, как точки?

**5. Решение.** Для начала рассчитаем угловой размер звезды для наблюдателя, расположенного в центре шара. Без учета дифракции света он будет равен отношению диаметра отверстия $d$ к радиусу глобуса $R$:

$$\alpha = \frac{d}{R}.$$

Если бы распространение света всегда подчинялось правилам геометрической оптики, угловой размер сокращается вплоть до нуля при уменьшении отверстий. Будем называть эту величину «геометрическим» размером звезды.

На самом деле, дифракция света на краях апертуры вносит ограничение на минимальный угловой размер изображения:

$$\beta \approx \frac{\lambda}{d}.$$

Данное равенство имеет приближенный характер, так как пучок света, падающий на отверстие, не параллельный. По этим же причинам мы можем опустить коэффициент 1.22 в этой формуле. В итоге, дифракционный размер звезды увеличивается с диаметром отверстия.

Определим диаметр отверстия, при котором геометрический и дифракционный угловые размеры равны. В этом случае видимый размер звезды перестает уменьшаться, а напротив увеличивается с дальнейшим сужением отверстия:

$$\frac{d}{R} = \frac{\lambda}{d}.$$

Отсюда

$$d = \sqrt{\lambda R} \approx 0.3 \text{ мм}.$$

При вычислениях мы брали длину волны $\lambda$=550 нм, соответствующую максимуму чувствительности человеческого глаза. При таком радиусе отверстия оба фактора примерно одинаковы и накладываются друг на друга. Можно считать, что видимый размер изображения в этом случае будет примерно равен сумме геометрического и дифракционного:

$$\theta \approx \alpha + \beta = 2\frac{d}{R} = 2\frac{\lambda}{d} \approx 0.003 \text{ рад} = 10'.$$

Именно в таком конусе будет распределен свет от самого маленького отверстия, соответствующего звездам шестой звездной величины (самым слабым наблюдаемым невооруженным глазом звездам). Это существенно больше разрешения человеческого глаза, так что, к сожалению, такой самодельный планетарий вообще не сможет построить достаточно точечных звезд. Естественно, что более ярких звезд размеры будут еще больше.

Видимая суммарная яркость звезды определяется размером отверстия, дифракция на нее практически не влияет. Сириус ярче звезд шестой величины в $2.512^{6+1.5}$=1000 раз, и для такой звезды размер отверстия для него должен быть

$$d_S = d\sqrt{1000} \approx 10 \text{ мм.}$$

Это соответствует угловому размеру

$$\theta_S = \frac{d_S}{R} \approx 0.05 \text{ рад} = 3^\circ.$$

Здесь дифракция уже не играет никакой роли.

**5. Система оценивания.**

**Этап 1 – 4 балла. Расчет оптимального диаметра отверстия.**
Этап включает в себя определение «геометрического» размера (1 балл), определение «дифракционного» размера (1 балл, наличие коэффициента 1.22 не влияет на оценку), определение оптимального размера отверстия (2 балла). Неточности определения каждого из факторов, не превосходящие 2 раз, приводят к снятию соответствующего количества баллов. Если же один из факторов не учтен, то понятие минимального видимого диаметра теряет смысл. Вне зависимости от иных методов оценить его (расчеты яркости пятна с учетом мощности ламп и т.д.) этап полностью не засчитывается. Последующие этапы оцениваются в полной мере, если полученное значение видимого диаметра не отличается от правильного более, чем в 10 раз.

**Этап 2 – 2 балла. Оценка возможности создания точечных изображений звезд.**
Этап включает определение минимального углового размера изображения (1 балл). При этом коэффициент 2, приведенный в решении, не является обязательным – он может быть опущен или заменен коэффициентом 1.4, соответствующим наложению изображений по теореме Пифагора. Однако, если коэффициент не попадает в интервал от 1 до 2, оценка уменьшается на 1 балл. Второй балл выставляется в случае правильного вывода о невозможности точечных изображений. Если этот вывод сделан без корректного вычисления геометрического и дифракционного изображения, оценка за два первых этапа в сумме не превосходит 1 балл.

**Этап 3 – 2 балла. Определение размера отверстия и углового размера изображения для Сириуса.**
Ответ может быть в 1.4 или 2 раза меньше приведенного выше, если в такое же число раз меньшим оказывается угол θ при выполнении предыдущих этапов (см. выше), это не влияет на оценку. Однако, если на угловой размер изображения Сириуса влияет дифракция на крупном отверстии, то вне зависимости от ответа данный этап не засчитывается. Правильное численное определение обеих величин оценивается по 1 баллу.

# X/XI.1 ЛАЗЕР ДВИЖУЩИЙ

*Автор неизвестен*

**1. Условие.** В одном из проектов будущего предполагается разгонять маленькие космические корабли мощным лазерным лучом, отправляя их на большие расстояния. До какой скорости можно разогнать идеально зеркальный корабль цилиндрической формы с диаметром основания 1 мм и массой 1 мг оптическим лазером мощностью 1 МВт и расходимостью пучка 5″? Считать, что основание цилиндра ориентировано перпендикулярно лазерному лучу, сам луч при выходе из лазера очень тонкий. Начальной скоростью корабля и гравитационным действием на него всех окрестных тел пренебречь.

**1. Решение.** Действие лазера на корабль будет несколько по-разному происходить в ближней зоне, когда весь пучок света будет попадать на грань корабля, и в дальней зоне, где корабль будет перехватывать лишь часть пучка. Определим расстояние, на котором размер пучка будет равен размеру корабля:

$$D_0 = d_0 / \rho = 41 \text{ м}.$$

Здесь $d_0$ - диаметр корабля, $\rho$ - расходимость пучка света лазера, выраженная в радианах. Пока расстояние от корабля меньше, чем $D_0$, лазер будет создавать постоянную силу светового давления, равную

$$F_0 = 2P / c,$$

где $P$ - мощность лазера, $c$ - скорость света. Множитель 2 появляется из-за зеркальной поверхности аппарата и положения его грани перпендикулярно пучку. В итоге, на расстоянии $D_0$ аппарат приобретет кинетическую энергию

$$E_0 = F_0 D_0 = \frac{2Pd_0}{\rho c}.$$

Когда аппарат удалится от лазера на большее расстояние $D$, на него будет действовать лишь часть пучка, доля перекрываемой площади будет убывать как квадрат расстояния. Сила действия составит

$$F = F_0 \frac{D_0^2}{D^2}.$$

Картина аналогична движению в гравитационном поле с той разницей, что сила имеет противоположный знак. При удалении с расстояния $D_0$ на бесконечность аппарат получит приращение кинетической энергии на величину $\Delta E = F_0 D_0 = E_0$. В итоге, кинетическая энергия аппарата на большом удалении от лазера будет равна $2E_0$. Теперь мы можем найти его скорость:

$$v = \sqrt{\frac{4E_0}{m}} = \sqrt{\frac{8Pd_0}{m\rho c}} \approx 1 \text{ км/с}.$$

**1. Система оценивания.**

**Этап 1 – 1 балл. Представление характера действия лазерного пучка на аппарат, который будет разным в двух зонах по расстоянию, определение границы зон.**

При отсутствии такого понимания – использования единой зависимости силы действия пучка на аппарат первый этап не засчитывается, а суммарная оценка за последующие этапы не превышает 2 баллов, см. далее.

**Этап 2 – 3 балла. Вычисление кинетической энергии и/или скорости аппарата на границе ближней зоны.**

Может выполняться в общем виде или численно. При использовании неверной зависимости силы от расстояния (отличной от константы), вытекающей из решения участника, этап оценивается в 0 баллов.

**Вероятная ошибка:** отсутствие множителя 2 в выражении для энергии или появление какого-либо иного постоянного множителя. Оценка за этап уменьшается на 1 балл, также влияя на оценку за финальный этап решения.

**Этап 3 – 3 балла. Вычисление кинетической энергии аппарата на бесконечном удалении.**

Может выполняться в общем виде или численно. При использовании неверной зависимости силы от расстояния (отличной от $\sim 1/D^2$), вытекающей из решения участника, этап оценивается в 0 баллов. Повтор ошибки, связанный с коэффициентом 2, не приводит к уменьшению оценки, если она уже была уменьшена на предыдущем этапе, но влияет на следующий этап.

**Этап 4 – 1 балл. Вычисление скорости аппарата на бесконечном удалении.**

Засчитывается только при правильном выполнении всех этапов и правильном ответе с точностью до 20%.

# X/XI.2 ВЗРЫВ КОМЕТЫ

*О.С. Угольников*

**2. Условие.** Ядро слабой кометы располагается в противосолнечной точке неба на расстоянии 1 а.е. от Земли, находясь при этом в перигелии своей параболической орбиты. В этот момент в ядре происходит взрыв, разбивающий его на миллион одинаковых осколков, разлетающихся во все стороны со скоростью до 10 м/с. Вскоре после взрыва комета на короткое время становится видимой на пределе в телескоп с диаметром объектива 8 см. Оцените время, в течение которого комета будет превосходить по своей поверхностной яркости фон неба ($21^m$ с квадратной секунды).

**2. Решение.** В первое время после взрыва комета остается еще достаточно компактным объектом. Определим предельную звездную величину для точечного объекта при наблюдении в телескоп с диаметром объектива $D$:

$$m = 6 + 5\lg(D/d) = 11.$$

Здесь $d$ - диаметр зрачка глаза, который для ночных условий равен примерно 8 мм. Легче всего комету будет видно в небольшой телескоп в тот момент, когда облако осколков расширится ровно настолько, чтобы осколки не затеняли друг друга, но будет еще компактным. Коль скоро комета появилась в телескоп на короткое время, можно судить, что это произошло как раз в описанный выше момент.

После этого комета начинает расширение. Она располагается в перигелии, поэтому в качестве мы можем считать, что ее расстояние от Солнца первое время будет примерно постоянным. Расстояние до Земли может меняться, но это, как известно, не будет влиять на поверхностную яркость протяженного объекта. Поэтому мы можем предположить, что расстояние от кометы до Земли остается постоянным и равно $l$=1 а.е. Кстати, именно такая ситуация реализуется, если комета обращается вокруг Солнца в плоскости эклиптики в ту же сторону, что и Земля. Тогда ее звездная величина первое время тоже меняться не будет, оставаясь равной $11^m$. Определим угловой радиус кометы, при которой ее поверхностная яркость составит $21^m$ ($10^{-4}$ от полной яркости) с угловой секунды:

$$\rho = \sqrt{10000/\pi}'' = 56'' \approx 1'.$$

Пространственный радиус кометы будет равен $R = l\sin\rho \sim 40$ тыс. км. Нам остается определить, за какое время самые быстрые выброшенные с ядра частицы удалятся от него на такое расстояние:

$$T = R / v = 1.5 \text{ месяца}.$$

В реальности, за это время расстояние кометы от Солнца возрастет с 2 а.е. до 2.07 а.е, что изменит ее поверхностную яркость всего на $0.07^m$, а итоговый ответ – на два дня. Поэтому сделанное нами предположение вполне пригодно для решения этой задачи. Остается заметить, что за такое время комета, изначально располагавшаяся в противостоянии с Солнцем в нашем небе, вне зависимости от направления своего движения не успеет оказаться с ним в соединении и скрыться в его лучах (даже при противоположном направлении движения кометы элонгация будет около 90°). В свою очередь, рой частиц еще останется близким к сферическому, не исказившись в ходе движения по орбите.

**2. Система оценивания.**

**Этап 1 - 2 балла. Определение проницающей способности телескопа.**
Допускается отклонение ответа от приведенного выше на $1^m$, связанного с иной величиной диаметра зрачка глаза (от 6 до 10 мм) и иной предельной звездной величиной для невооруженного глаза (от 5.5 до $6.5^m$). Это не влияет на оценку как за этот этап, так и за последующие, где ответы также будут отличаться. Если же отклонение вызвано использованием неверных формул, то этап не засчитывается полностью.

**Этап 2 - 1 балл. Указание, что расстояние кометы от Солнца в последующее время практически не будет изменяться.**
Это необходимо для корректного выполнения последующих этапов, в частности, анализа поверхностной яркости кометы. Участники могут не делать это предположение и рассчитывать расстояние в соответствии с характером орбиты кометы, в таком случае последующие этапы оцениваются исходя из правильности их выполнения.

**Этап 3 - 3 балла. Определение пространственного размера кометы, при котором ее видимая поверхностная яркость совпадет с яркостью фона неба.**
Нужно либо указать, что поверхностная яркость не зависит расстояния от Земли, и тогда возможно приводить расчеты к расстоянию 1 а.е., либо проводить вычисления методом, независящим от расстояния. При отсутствии подобного пояснения либо указания, что расстояние от Земли тоже будет практически постоянным, за этап выставляется 2 балла, остальные оцениваются в полной мере.

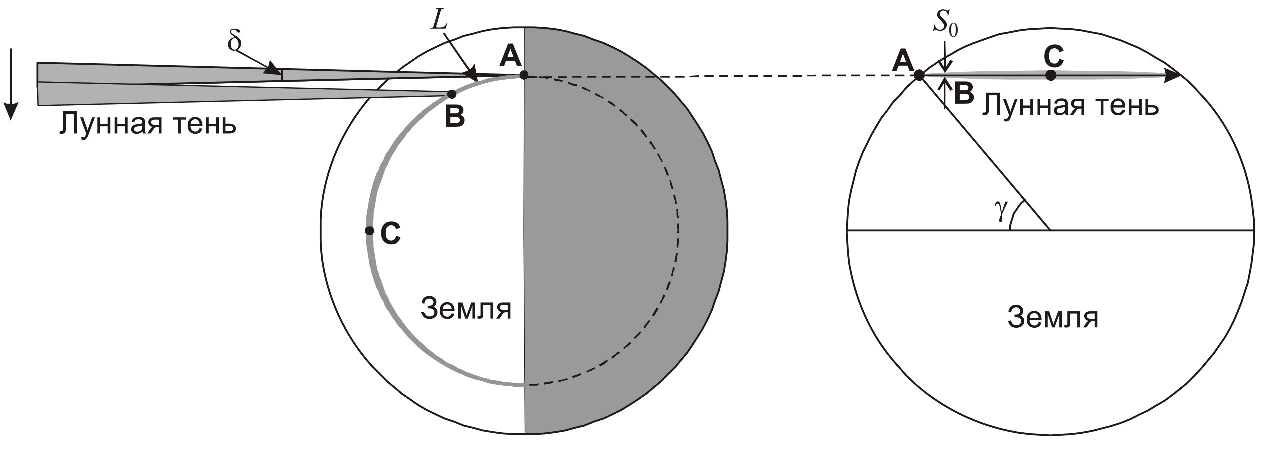
**Этап 4 - 2 балла. Определение искомого времени.**
Этап оценивается в 2 балла при условии правильного ответа. Допускаются отклонения, вызванные эффектами, описанными в первом этапе решения.

# X.4 ТОНКАЯ ПОЛОСА

*О.С. Угольников*

**4. Условие.** На Земле происходит солнечное затмение. В некоторой точке Земли на горизонте наблюдается полное затмение с фазой ровно 1.0, видимые диски Солнца и Луны совпадают по положению и размерам. В 10 км от этой точки вдоль пути тени ширина полосы полной фазы на поверхности Земли составляет 200 м. На какой максимальной высоте над горизонтом можно будет увидеть это полное солнечное затмение на Земле? Атмосферной рефракцией, рельефом и эффектами осевого вращения Земли пренебречь.

**4. Решение.** Изобразим картину видимости этого затмения в проекции, перпендикулярной плоскости вращения Луны вокруг Земли (слева) и вид со стороны Солнца (справа).




*Солнце сбоку* *Солнце позади наблюдателя*

Нам неизвестен угол γ (аналог широты, если бы лунная тень двигалась параллельно экватору), характеризующий путь лунной тени по хорде диска Земли. Обозначим точку, описанную в условии задачи и в которой затмение с фазой 1.0 наблюдается на горизонте, как **A**, будем для определенности считать, что в этой точке тень Луны вошла на поверхность Земли. Плоскость движения оси тени пересечет поверхность Земли по окружности, показанной пунктиром на рисунке слева. Угол раствора конуса лунной тени δ равен угловым диаметрам Солнца и Луны, совпадающим при наблюдении из точки **A**. В качестве значения этого угла возьмем средний угловой диаметр Солнца – 32′ или 0.0093 радиан. Расстояние $L$ между точками **A** и **B** мало, и соединяющая их линия на поверхности Земли может считаться прямым отрезком, образующим малый угол с осью тени. С учетом этого, толщина конуса тени в точке **B** равна $S_0 = L\delta = 93$ метра. Из–за эффекта проекции ширина полосы тени на поверхности Земли увеличивается до

$$S = S_0 / \cos\gamma = L\delta / \cos\gamma.$$

Эта величина нам известна, она равна 200 м. Отсюда получаем величину угла γ:

$$\gamma = \arccos(L\delta/S) = 62.3°.$$

Если пренебречь размерами тени по сравнению с радиусом Земли $R$, то максимальная высота над горизонтом $h_0$, на которой будет видно полное затмение в точке **C**, есть дополнение угла γ до 90° и равна 27.7°. Можно получить и более точное решение. В середине затмения, в точке **C**, ширина конуса увеличится до $R\delta \cos\gamma = 27.5$ км. На нижнем краю полосы (правый рисунок) высота Солнца над горизонтом во время наибольшей фазы составит

$$h = h_0 + (R\delta \cos\gamma / 2R) = h_0 + \delta\cos\gamma/2 = 27.8°.$$

Как видим, учет конечной ширины тени на ответ практически не влияет.

**4. Система оценивания.**

**Этап 1 - 3 балла. Ширина конуса тени в точке B.**
Может определяться численно, может быть записана в виде формулы, которая используется в дальнейших вычислениях. Допускается отклонение в пределах 5%, связанное с изменением видимых диаметров Солнца и Луны. При ошибке в 2 раза (угловой радиус Солнца путается с его угловым диаметром) этап не засчитывается, оставшиеся оцениваются в полной мере, в зависимости от их выполнения.

**Этап 2 - 3 балла. Определение угла γ или вида хорды пути тени по диску Земли, на основе данных о ширине полосы.**

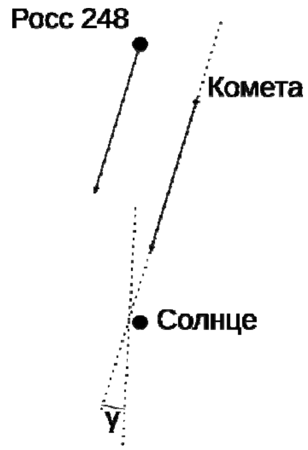
**Этап 3 - 2 балла. Определение максимальной высоты наблюдения полного затмения над горизонтом.**
Учет ширины тени может производиться, но не обязателен и на оценку не влияет.

**Возможная ошибка при решении:** решение и ответ оказываются зависимыми от сезона года, широты точки наблюдения затмения, угла наклона экватора к эклиптике ($\varepsilon$=23.4°), угла наклона орбиты Луны к эклиптике ($i$=5.1°), меняясь при формальном изменении этих углов. Данные признаки однозначно свидетельствуют об ошибочности решения, вне зависимости от ответа. Такое решение не может быть оценено выше 2 баллов, оценка далее снижается при наличии в решении иных фактических ошибок.

**Возможная ошибка при решении:** угол γ путается с его дополнением до 90° (синус путается с косинусом), получается неправильный ответ $h$=62.3°. В этом случае этап 1 оценивается полностью при условии его выполнения, этапы 2 и 3 засчитываются по 1 баллу. Максимальная оценка (при условии отсутствия иных ошибок) составляет 5 баллов.

**5. Условие.** Комета покинула окрестности звезды Росс 248 по параболической траектории относительно нее и попала в окрестности Солнца, пролетев мимо него на минимальном расстоянии 1 а.е. Какой был эксцентриситет орбиты этой кометы при пролете около Солнца? На какой угол изменится направление скорости кометы после пролета через Солнечную систему? Параметры звезды Росс 248: собственное движение 1.6″/год, лучевая скорость равна -78 км/с, параллакс 0.32″. Влиянием на систему всех иных тел, кроме Солнца и звезды Росс 248, пренебречь.

**5. Решение.** Вся история наблюдений за кометами, за очень редкими исключениями, свидетельствует о том, что эксцентриситеты орбит комет, навсегда покидающих Солнечную систему, незначительно больше единицы, т. е. кометы улетают по почти параболическим орбитам. Разумно предположить, что если в системе звезды Росс 248 существуют кометы, то свойства их орбит такие же. А значит, улетевшая на большое расстояние от звезды комета будет относительно практически неподвижна относительно этой звезды.




В таком случае комета относительно Солнца будет иметь такую же скорость, что и звезда, а именно:

$$V_{\mathrm{C}} = \sqrt{V_{\mathrm{r}}^2 + \left(4.74\frac{\mu}{\pi}\right)^2} = 81.5\,\text{км/с}.$$

Здесь $V_{\mathrm{r}}$ - лучевая скорость звезды, $\mu$ - ее собственное движение, $\pi$ - годичный параллакс. Именно такую скорость имеет комета, издали приближаясь к Солнцу. С другой стороны, в соответствии с законом сохранения энергии, скорость на любом участке гиперболической орбиты равна

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right).$$

Здесь $G$ – гравитационная постоянная, $M$ – Масса Солнца, $a$ – параметр, который по аналогии с эллиптическими орбитами называется большой полуосью орбиты кометы. На бесконечно большом расстоянии

$$V_{\mathrm{C}}^2 = \frac{GM}{a},$$

откуда большая полуось равна $2\cdot10^{10}$ м или 0.134 а.е. Расстояние в перицентре $r_{\mathrm{p}}$ равно 1 а.е. Следовательно, эксцентриситет равен

$$\varepsilon = \frac{r_{\mathrm{p}}}{a} + 1 = \frac{V_{\mathrm{C}}^2}{v_0^2} + 1 \approx 8.49.$$

Здесь $v_0$ - круговая скорость на расстоянии 1 а.е., близкая к орбитальной скорости Земли. Уравнение асимптот гиперболы можно записать в виде

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

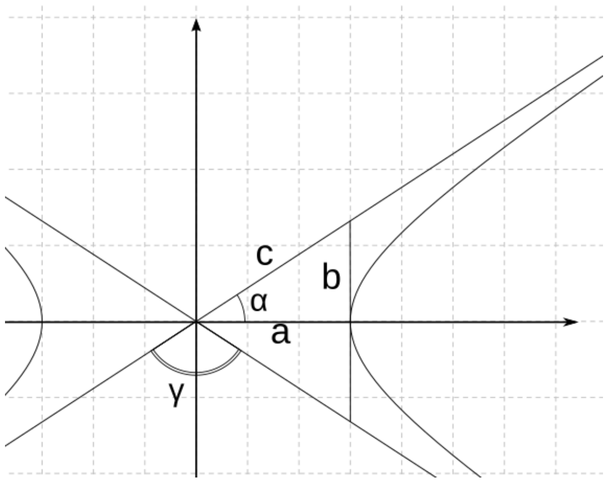
где $b$ – малая полуось гиперболы:

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что угол между асимптотой и осью абсцисс равен

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \mathrm{arctg}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Выражение для угла α можно получить в более простом виде, воспользовавшись известным соотношением для гиперболы $c^2 = a^2+b^2$, где $c$ – фокусное расстояние ($c = a\varepsilon$).




Из рисунка видно, что

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a}{c}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Сам искомый угол поворота равен

$$\gamma = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Таким образом, угол поворота зависит только от эксцентриситета орбиты.

$$\gamma = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 14°.$$

К тому же выводу можно прийти другим путем. Малая полуось гиперболы есть:

$$b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{r_{\text{p}}^2 + 2r_{\text{p}}a} = 1.13 \text{ а.е.}$$

и

$$\gamma = 180^{\text{O}} - 2\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = 14°.$$

**5. Система оценивания.**

**Этап 1 – 1 балл. Вывод о том, что комета относительно Солнца «на бесконечности» движется со скоростью звезды.**

**Этап 2 – 1 балл. Вычисление гелиоцентрической скорости кометы на удалении от Солнца.**
Скорость может быть определена численно или записана в виде выражения на основе данных о звезде Росс 248. Первые два этапа могут быть выполнены участником слитно в виде одного абзаца или выражения.

**Этап 3 – 3 балла. Определение эксцентриситета орбиты.**
2 балла выставляются за применение правильной формулы и 1 балл – за верное численное решение. Однако, при величине эксцентриситета $e$<1 оценка за этап не может превышать 1 балл.

**Этап 4 – 3 балла. Определение угла поворота кометы.**
2 балла выставляются за применение правильной формулы и 1 балл – за верное численное решение.

**Вероятная ошибка при решении:** В качестве скорости кометы берется какая-либо величина, не связанная со скоростью звезды. В этом случае не оцениваются первые два этапа, третий этап при условии верного исполнения (для принятой скорости) оценивается полностью, последний этап - не более 2 баллов (нет правильного ответа). Максимальная оценка составляет 5 баллов.

# X.6 ГЛОБАЛЬНАЯ БУРЯ

*О.С. Угольников*

**6. Условие.** На Марсе разразилась мощная пылевая буря, охватившая в равной степени всю планету и ослабившая блеск Солнца в зените на $1^m$. Определите общую массу поднятой пыли, считая, что она состоит из частиц радиусом 0.1 мм и плотностью 1.5 г/см$^3$. Волновые эффекты при взаимодействии света с частицей не учитывать.

**6. Решение.** Ослабление света на $1^m$ (2.512 раз) примерно соответствует ситуации, когда на пути света от Солнца в зените до поверхности Марса в среднем оказывается одна пылевая частица. Если бы мы могли разложить всю эту пыль равномерно по поверхности планеты, то она легла бы на нее одним ровным слоем. Мы можем определить полное количество частиц, разделив площадь поверхности Марса (радиус $R$) на площадь сечения одной частицы (радиус $r$):

$$N = \frac{4\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{4R^2}{r^2} = 5\cdot 10^{21}.$$

Суммарная масса этих частиц составит

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 N = \frac{16\pi\rho r R^2}{3} = 2.9\cdot 10^{13}\ \text{кг}.$$

Если быть более точным, то ослабление света на $1^m$ соответствует числу пылинок на луче зрения $\eta = \ln 2.512 = 0.92$, и общая масса пыли составит $\eta m = 2.7\cdot 10^{13}$ кг.

**6. Система оценивания.**

**Этап 1 – 3 балла. Оценка среднего количества частиц на луче зрения при наблюдении в зените.**

Примерная оценка в единицу достаточна для выставления максимальной оценки в 3 балла. Более точная оценка дает число частиц, равное 0.92 и уменьшение итоговой массы пылевого слоя на 8%, что на оценку не влияет. Более грубый подход, не учитывающий возможное перекрытие частиц друг с другом, дает количество частиц на луче зрения, равное $(1–2.512^{-1})=0.6$, что приведет к недооценке массы на 30–40%. В этом случае первый этап оценивается 1 баллом, последующие выкладки оцениваются в полной мере. При оценке количества частиц на луче зрения меньше 0.5 или больше 2.0 оценка ***за все задание*** обнуляется. Это относится также к случаю, когда подобная величина не указывается, но вытекает из решения участника.

**Этап 2 – 5 баллов. Оценка массы пыли.**

Это можно делать как напрямую, так и через определение (в общем или численном виде) количества частиц в атмосфере Марса. В этом случае это определение оценивается в 2 балла, последующее вычисление массы – в 3 балла. При ошибке более чем на один порядок величины (в 10 раз) оценка за второй этап не превосходит 2 баллов, при ошибке на два порядка и более второй этап не засчитывается полностью.

**Вероятное неточное решение:** схема, при которой пыль воспринимается как монолитный слой на поверхности Марса толщиной 0.1 мм. Такой подход также приведет к недооценке массы примерно на 40% и в случае правильных вычислений все решение оценивается в 6 баллов.