Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **1 февраля 2019 г.** (I тур) и **2 февраля 2019 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2018–2019 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018–2019 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 1 февраля 2019, по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.1. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то число (не обязательно целое). Затем первый сказал: «Моё число больше 1», второй сказал: «Моё число больше 2», …, десятый сказал: «Моё число больше 10». После этого все десять, выступая в некотором порядке, сказали: «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», …, «Моё число меньше 10» (каждый сказал ровно одну из этих десяти фраз). Какое максимальное количество рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

(*О. Подлипский*)

Ответ. 9 рыцарей.

Решение. *Оценка.* Заметим, что ни один из рыцарей не мог сказать фразу «Моё число больше 10», иначе задуманное им число было бы в самом деле больше 10. Но тогда он не мог бы сказать ни одну из фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», …, «Моё число меньше 10». Значит, имеется хотя бы один лжец, а рыцарей не более 9.

Пример. Покажем, что рыцарей могло быть 9. Пусть первый человек загадал число 1,5, второй — 2,5, …, девятый — 9,5, а десятый человек загадал число 5. Тогда при $k = 1, 2, \dots, 9$ k-ый человек мог сказать правдивые фразы «Моё число больше k» и «Моё число меньше $k+1$» (т. е. он рыцарь), а десятый человек — лжец, говорящий фразы «Моё число больше 10» и «Моё число меньше 1».

Замечание. Приведённый выше пример перестаёт быть верным, если десятый человек задумывает число вне интервала $(0; 10)$, так как тогда ровно один из его ответов правдив.

Комментарий. Доказано, что рыцарей не больше 9 (или, эквивалентно, есть хотя бы один лжец) — 3 балла.

Приведён пример, показывающий, что рыцарей могло быть 9, с указанием, какой человек сказал какие фразы — 4 балла.

Если в приведённом примере не полностью описана ситуация (например, не сказано, какое число загадал лжец, или явно не указано, кто говорил какую фразу) — из 4 баллов за пример ставится не более 2 баллов.

10.2. Дан выпуклый четырёхугольник периметра 10^{100}, у которого длины всех сторон — натуральные числа, а сумма длин любых трёх сторон делится на длину оставшейся четвёртой стороны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб. (*П. Кожевников*)

Решение. Обозначим через a, b, c и d длины сторон, положим $N = 10^{100}$.

Первое решение. Пусть d — наибольшая сторона. Согласно условию, $a+b+c$ делится на d, то есть $a+b+c = kd$ для некоторого натурального k. Ясно, что $a+b+c > d$ (длина отрезка меньше длины ломаной с теми же концами), поэтому $k > 1$. Кроме того, так как $a \leqslant d$, $b \leqslant d$ и $c \leqslant d$, имеем $a+b+c \leqslant 3d$, то есть $k \leqslant 3$.

Случай $k = 3$ возможен только при $a = b = c = d$. В этом случае наш четырёхугольник — ромб.

Иначе $1 < k < 3$, откуда $k = 2$. Но в этом случае имеем $N = a+b+c+d = 2d+d = 3d$. Таким образом получаем противоречие, поскольку N не делится на 3.

Второе решение. Из условия следует, что каждое из чисел a, b, c, d является делителем числа $N = a+b+c+d$. Значит, $a = N/t_a$, $b = N/t_b$, $c = N/t_c$, $d = N/t_d$ для некоторых натуральных $t_a > 1$, $t_b > 1$, $t_c > 1$, $t_d > 1$.

Заметим, что $t_a \neq 2$, иначе длина строны a равна полупериметру, что невозможно, поскольку $a < b+c+d$.

Поскольку N не делится на 3, имеем $t_a \neq 3$, значит, $t_a \geqslant 4$ и $a \leqslant N/4$. Аналогично, $b \leqslant N/4$, $c \leqslant N/4$, $d \leqslant N/4$. Тогда равенство $N = a+b+c+d$ возможно только в случае $a = b = c = d = N/4$, т.е. в случае, когда наш четырёхугольник — ромб.

Замечание. Отметим, что в любом полном решении должны существенно использоваться следующие условия:

1. Неравенство многоугольника (т.е. тот факт, что a, b, c, d — длины сторон четырёхугольника, а не произвольная четвёрка натуральных чисел с суммой N, для которой сумма любых трёх чисел делится на четвёртое). Иначе контрпримером являлась бы четвёрка $N/2$, $N/4$, $N/8$, $N/8$.

2. N не делится на 3. Для N, кратного 6, контрпримером являлся бы четырёхугольник со сторонами $N/3$, $N/3$, $N/6$, $N/6$.

Комментарий. При продвижении в сторону первого решения ставятся следующие баллы (баллы за несколько продвижений суммируются):

Рассмотрена делимость на длину наибольшей стороны и доказано, что $k \leqslant 3$ — 3 балла

Рассмотрен случай $k = 3$ — 1 балл.

Доказано, что $k > 1$ (использовано неравенство многоугольника) — 1 балл.

Доказано, что случай $k = 2$ невозможен (использована делимость на 3) — 2 балла.

При продвижении в сторону второго решения ставятся следующие баллы (баллы за несколько продвижений суммируются):

Получено уравнение $1/t_a + 1/t_b + 1/t_c + 1/t_d = 1$ (или эквивалентное) — 3 балла.

Если уравнение не рассмотрено, а только указано, что периметр делится на длину (любой) стороны — вместо 3 баллов ставится 1 балл.

Рассмотрен случай $t_a \geqslant 4$, $t_b \geqslant 4$, $t_c \geqslant 4$, $t_d \geqslant 4$ — 1 балл.

Доказано, что $t_a \neq 2$ (использовано неравенство многоугольника) — 1 балл.

Доказано, что случай $t_a = 3$ невозможен (использована делимость на 3) — 2 балла.

10.3. Клетки таблицы 2×2019 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2019 действительных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней строке должны стоять те же 2019 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2019 столбцов должны быть записаны два разных числа, причём сумма этих двух чисел должна быть рациональным числом. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы? (*С. Кудря*)

Ответ. 2016.

Решение. *Оценка.* Докажем, что в первой строке таблицы, в которой числа расставлены по правилам, не менее трёх рациональных чисел (и, соответственно, не более 2016 иррациональных чисел). Каждое из чисел, встречающихся в таблице, записано ровно в двух клетках, одна из которых находится в верхней строке, а другая — в нижней. Рассмотрим некоторый столбец, пусть в его верхней клетке стоит число a_1, а в нижней — a_2 (далее коротко обозначаем такой столбец (a_1, a_2)). Покрасим столбец (a_1, a_2). Найдём столбец, у которого число a_2 находится в верхней клетке, и покрасим его. Если этот столбец — (a_2, a_1), то завершим процесс. Иначе, если этот столбец — (a_2, a_3), где $a_3 \neq a_1$, продолжим: покрасим столбец, у которого число a_3 находится в верхней клетке, и т. д. — пока не дойдём до столбца, у которого в нижней клетке находится a_1 (это обязательно произойдёт, поскольку числа, равные a_2, a_3, $\ldots$, красятся парами). По окончании процесса получим множество покрашенных столбцов (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_k, a_1), которое назовём *циклом* длины k. Если остались ещё непокрашенные столбцы, выделим ещё один цикл, и т. д. В конечном итоге множество всех столбцов таблицы разобьётся на непересекающиеся циклы. Так как сумма длин всех циклов равна 2019, найдётся цикл нечетной длины.

Рассмотрим этот цикл: (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_{2t+1}, a_1), где $t \geqslant 1$. По условию $a_1+a_2 = b_1$, $a_2+a_3 = b_2$,$\ldots$, $a_{2t+1}+a_1 = b_{2t+1}$, где все b_i — рациональные числа. Тогда $2a_1 = (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - \ldots - (a_{2t} + a_{2t+1}) + (a_{2t+1} + a_1) = b_1 - b_2 + b_3 - \ldots - b_{2t} + b_{2t+1}$ — рациональное число, поэтому a_1 рационально. Аналогично, все числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2t+1} рациональны, и их не менее $2t + 1 \geqslant 3$.

Пример. Приведём пример таблицы, заполненной по правилам, в верхней строке которой 2016 иррациональных чисел:

1	2	3	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$\ldots$	$1008+\sqrt{2}$	$1008-\sqrt{2}$
2	3	1	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$\ldots$	$1008-\sqrt{2}$	$1008+\sqrt{2}$

Замечание. Заметим, что условие нечётности длины строки таблицы существенно. Для чётной длины строки нетрудно построить примеры таблиц, в которых все числа иррациональны.

Условие того, что число не стоит под самим собой, также важно, иначе мог бы появиться цикл длины 1, и ответ в задаче стал бы равен 2018.

Комментарий. Верно доказана оценка (не более 2016 иррациональных или, эквивалентно, не менее 3 рациональных чисел) — 5 баллов.

Утверждение о разбиении перестановки на независимые циклы принимается без доказательства.

При отсутствии доказательства оценки доказано, что в столбцах, образующих цикл нечётной длины, все числа рациональны — 2 балла (из 5 возможных баллов за оценку).

Предъявлен верный пример с 2016 иррациональными числами — 2 балла.

Доказательство иррациональности корней квадратных из натуральных чисел, не являющихся точными квадратами, корней кубических из натуральных чисел, не являющихся точными кубами, и т. п., не требуется.

10.4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-2} + a_2x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ каждый член меньше предыдущего. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть $n \geqslant 2018$. Заметим, что $P_n(a) = P_n(-a)$ при всех a. Значит, поскольку $P_n(x)$ имеет ненулевой корень, он имеет и отрицательный корень, откуда $a_{n+1} < 0$.

Далее, поскольку $P_{n+1}(x) = x^2P_n(x) + a_{n+1}$, имеем

$$P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^2P_n(a_{n+1}) + a_{n+1} = 0 + a_{n+1} < 0. \qquad (*)$$

Так как степень многочлена $P_{n+1}(x)$ чётна, а старший коэффициент положителен, при достаточно больших по модулю отрицательных x он принимает положительные значения. Теперь из $(*)$ следует, что у этого многочлена есть корень на интервале $(-\infty, a_{n+1})$. Значит, и $a_{n+2} < a_{n+1}$.

Итак, мы получили, что $a_{n+2} < a_{n+1}$ при всех $n \geqslant 2018$. Это означает, что последовательность $(a_{2019}, a_{2020}, a_{2021}, \ldots)$ — убывающая.

Комментарий. Замечено, что $a_n < 0$, если n достаточно велико — 1 балл.

Замечено соотношение $P_{n+1}(x) = x^2P_n(x) + a_{n+1}$ — 1 балл (может суммироваться с предыдущим баллом).

Во в целом верном решении утверждается, что последовательность обязательно убывает, начиная с 2018-го (а не с 2019-го) члена — снимается 1 балл.

10.5. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Продолжение медианы, проведённой из вершины B, пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке D. Через центр окружности, описанной около треугольника BDL, проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что окружность ω касается прямой ℓ. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть M — середина отрезка AC, S — вторая точка пересечения прямой BL с окружностью ω, N — середина дуги ABC (см. рис. 4). Тогда S — середина меньшей дуги AC окружности ω, а точки M, S, N лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Прямая BN — внешняя биссектриса угла ABC, поэтому $BN \perp BL$. Тогда $\angle LBN + \angle LMN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, откуда мы получаем, что четырехугольник $BLMN$ — вписанный. Обозначим $\angle MBL = \alpha$. Тогда $\angle MNL = \alpha$. Также, так как $BNDS$ — вписанный, $\angle SND = \angle SBD = \alpha$.

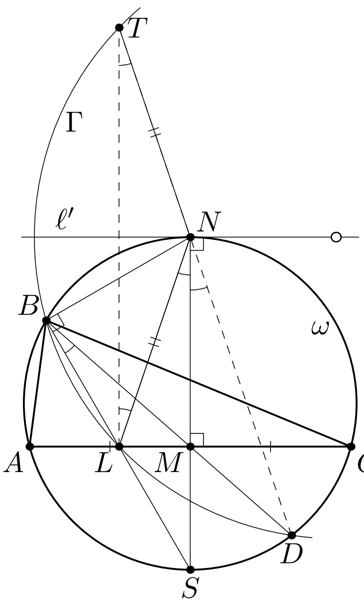

Рис. 4

На продолжении отрезка DN за точку N отметим точку T так, что $LN = NT$. Тогда $\angle LNT = 180^\circ - \angle LNM - \angle SND = 180^\circ - 2\alpha$, откуда следует, что $\angle LTN = \angle TLN = \alpha$. Значит, $\angle LTD = \alpha = \angle LBD$, поэтому точка T лежит на окружности Γ, описанной около треугольника BDL. Пусть ℓ' — касательная в точке N к окружности ω. Поскольку SN — диаметр ω, то $\ell' \perp SN$ и $\ell' \parallel AC$. Как мы знаем, SN является внешней биссектрисой угла LNT, поэтому ℓ' — биссектриса угла LNT. Так как $TL = TN$, получаем, что ℓ' является серединным перпендикуляром к отрезку TL, а потому проходит через центр окружности Γ. Таким образом, прямые ℓ и ℓ' совпадают, и прямая ℓ касается ω.

Комментарий. Построена точка T из решения — 1 балл.